Organ van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

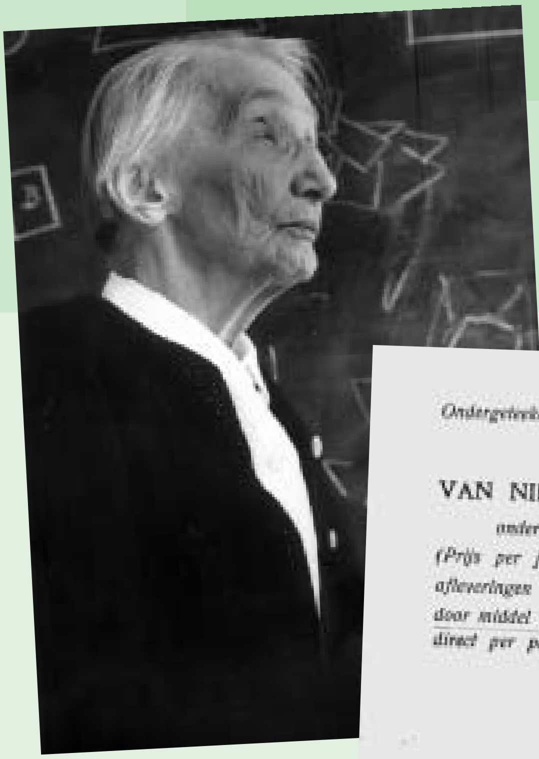
EUCLIDES

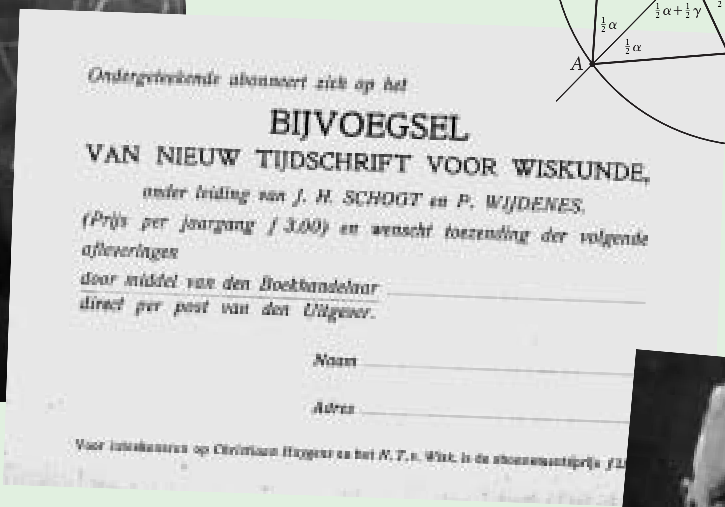
Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 75

1999-2000 januari

4





Ondergeteekende abonneert zich op het

BIJVOEGSEL

VAN NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE,

onder leiding van J. H. SCHOGT en P. WIJDENES.

(Prijs per jaargang f 3.00) en wenscht toezending der volgende afleveringen

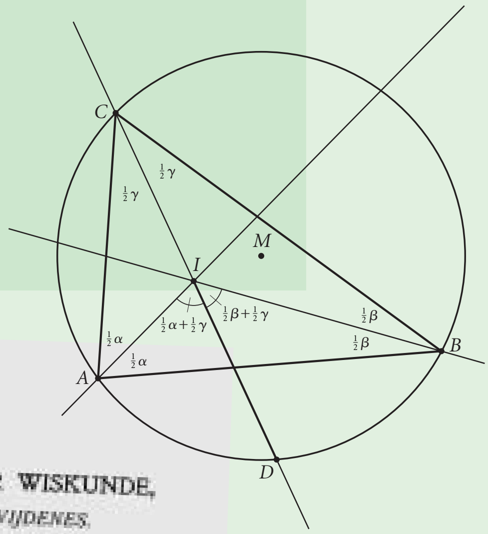
door middel van den Boekhandelaar ____________

direct per post van den Uitgever.

Naam ____________

Adres ____________

Voor intekenaars op Christiaan Huygens en het N. T. v. Wisk. is de abonnementsprijs f1



Tatjana Ehrenfest en Dijksterhuis stonden aan de wieg van Euclides

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24
3731 GH De Bilt
e-mail: cph@xs4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.euronet.nl/~nvvw

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: mkommer@knoware.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
wkuipers@worldonline.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: ƒ 80,00
Studentleden: ƒ 40,00
Leden van de VVWL: ƒ 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer. Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar. Betaling geschiedt per acceptgiro. Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Colofon
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Adresgegevens auteurs

K. van Berkel
Fonteinkruid 8
9801 LE Zuidhorn

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

E. de Moor
Vondelkerkstraat 32
1054 KZ Amsterdam

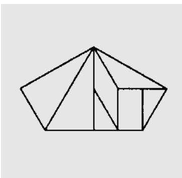
A. van Streun
Leidijk 24
9247 CT Ureterp

K. Wagensveld
Bollardveen 1
4651 GN Steenbergen

Inhoud

111

132



142

van de redactietafel

Net iets meer dan 75 jaar geleden, in december 1924, viel bij menig wiskundedocent, net zoals nu bij u, een bijvoegsel bij een tijdschrift in de bus. Het droeg de volgende naam:

> **Bijvoegsel**
> van het nieuw tijdschrift
> voor wiskunde
> gewijd aan onderwijsbelangen
> 1e jaargang 1924/1925. Nr.1

Dat was de start, toen nog onder een andere naam, van het tijdschrift dat u nu leest.
De doelstellingen van het Bijvoegsel roepen ook nu nog veel herkenning op:
“Methodische schetsen: Het is zoo broodnoodig dat ervaren leeraren aan jongeren mededeeling doen van hunne wijze van lesgeven. In ons land weet niemand, *hoe* een ander lesgeeft; wij hebben nog nooit ook maar vijf minuten een ander aan het werk gezien.”
En wat dacht u van:
“Wetgevingen; het Bijvoegsel wenscht te zijn een tribune voor het vrije woord van hen, die in opstand komen tegen maatregelen van “bovenaf” en tegen slappe halfheid. Besprekingen b.v. over de brandende kwestie: het peil der leerlingen, die ons thans worden gezonden: zoo zouden b.v. 70% van de nieuw aangekomen leerlingen van de 1e HBS met 3-j.c. te Amsterdam, gemeten met de sommen van het toelatingsexamen van drie jaar geleden, gladweg onvoldoende hebben gekregen.”
En de huidige redactie sluit zich ook nog steeds aan bij de oproep in de slotzin:
“Wij roepen ieders medewerking in, opdat dit nieuwe Tijdschrift ons Middelbaar en Voorbereidend Hooger onderwijs ten voordeele moge strekken.
J.H. SCHOGT, P. WIJDENES”

Euclides en de Vereniging

Al heel lang inmiddels is er een onlosmakelijke band tussen de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en het Vakblad voor de wiskundeleraar Euclides.
Dat roept toch een aantal vragen op:

1. Waarom was er opeens een wiskundetijdschrift gewijd aan onderwijsbelangen?
2. Wanneer en waarom is het tijdschrift Euclides gaan heten?
3. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren viert in november 2000 uitgebreid haar 75-jarig bestaan. Is de Vereniging een jaar later ontstaan dan het blad? En wat was vroeger precies die band?

In dit nummer

In dit nummer zijn een aantal artikelen bijeengebracht die u een antwoord geven op bovengenoemde vragen. De auteurs zijn aangezocht om hun indrukwekkende werk rond de geschiedenis van het wiskundeonderwijs en/of rond de ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs.
Als u het Bijvoegsel en de artikelen leest, dan is het buitengewoon opvallend hoe een aantal verschillende meningen over de invulling van het wiskundeonderwijs toen, bijna onveranderd herkenbaar zijn in de discussies over de invulling van het wiskundeonderwijs nu.
Ook nu gaan er nog steeds stemmen op om het wiskundeonderwijs op de Platoonse leest van het logisch-deductieve te schoeien.
Ook nu zijn er voorstanders van een intuïtieve en aanschouwelijke opbouw.
Ook nu zijn er aanhangers van de gedachte dat wiskundeonderwijs een praktische en brede algemeen vormende waarde moet hebben voor alle leerlingen.
Zou in 2024 deze discussie nog steeds bestaan?
Ik wens u in ieder geval veel leesplezier.

Kees Hoogland

De geboorte van een tijdschrift*

Klaas van Berkel

In 1924 verscheen bij de Groningse uitgeverij P.J. Noordhoff *Val en worp,* het eerste boek van de Tilburgse wiskundeleraar en wetenschapshistoricus E.J. Dijksterhuis.

In de brief van 21 oktober 1924, waarin Noordhoff Dijksterhuis berichtte dat *Val en worp* verschenen was, sneed hij ook nog een geheel ander onderwerp aan:

'Over de door U gezonden copie van den brochure contra Mevr. Ehrenfest ben ik in correspondentie met den heer Wijdenes. De uitgave van brochures is over het algemeen zoo weinig loonend voor den uitgever, dat ik den heer Wijdenes heb voorgesteld Uw brochure zoo mogelijk in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde op te nemen. Ik hoop hierop terug te komen.'

De brochure waar Noordhoff op doelde was gericht tegen Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa, een van oorsprong Russische wiskundige die getrouwd was met de Leidse hoogleraar in de natuurkunde Paul Ehrenfest. Zij hield zich bezig met de didactiek van de wiskunde en had daarover bij de concurrent van Noordhoff, de firma Wolters, een brochure geschreven onder de titel *Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven?* Haar opvattingen druisten in tegen veel van wat Dijksterhuis in de meetkunde juist zo belangrijk vond. Hij had de pen opgenomen, een tegengeschrift samengesteld en dat vervolgens aan 'zijn' uitgever aangeboden. Maar hij kon niet bevroeden wat hij daar allemaal mee los zou maken.

Een nieuw tijdschrift

Noordhoff voelde dus niet veel voor een aparte uitgave; liever zag hij het stuk in een tijdschrift ondergebracht. Hij stuurde het naar zijn vaste adviseur voor de wiskunde, de Amsterdamse wiskundige Piet Wijdenes, en vroeg wat hij ervan vond. Wijdenes (1872-1972) was in de wiskundige wereld een man met bijzondere betekenis, die hij niet aan opleiding of functie, maar vooral aan zijn pen dankte. Hij was geboren in Opperdoes (bij Medemblik) en had het stugge en onverzettelijke karakter dat aan West-Friezen wordt toegeschreven. Zijn carrière was hij begonnen als onderwijzer, maar door het behalen van allerlei akten had hij zich opgewerkt tot leraar wiskunde in achtereenvolgens Almelo, Rotterdam en Amsterdam. Daarnaast had hij vele cursussen gegeven die opleidden tot de verschillende middelbare akten voor wiskunde. Die onderwijservaring benutte Wijdenes voor het schrijven van talrijke schoolboeken voor de onderscheiden onderdelen van de wiskunde, die allen bij de firma Noordhoff in Groningen verschenen. Bovendien voerde hij de redactie of de administratie van enkele tijdschriften die bij Noordhoff uitkwamen (zoals *het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde)*, tekende hij vele figuren voor boeken en artikelen van anderen en diende hij in het algemeen de uitgever van advies over mogelijke publicaties. Dat leverde hem al met al zoveel op dat hij van zijn pen kon leven en in 1925 zou hij dan ook zijn leraarschap eraan geven. Zijn huis in de Obrechtstraat in Amsterdam-Zuid was zo ongeveer een bijkantoor van de Groningse firma Noordhoff.

Wijdenes had een uitgesproken mening over het wiskundeonderwijs in Nederland. 'Ik beweer', schreef hij later eens, 'dat we bij het onderwijs nog in vele gevallen met de diligence rijden en als lichtbron het oliepitje gebruiken.'
Vanaf het moment dat hij in contact was gekomen met Dijksterhuis - in 1922 hadden ze gecorrespondeerd naar aanleiding van enkele passages in een leerboek van Wijdenes - had hij een medestander gezien in de Tilburgse leraar en hij stond dan ook onmiddellijk sympathiek tegenover diens wens om iets tegen de brochure van Tatiana Ehrenfest te schrijven. Het idee om de tegenbrochure van Dijksterhuis in een bestaand tijdschrift onder te brengen, zoals door Noordhoff gesuggereerd, leek hem echter minder geslaagd, hij had een beter idee. Hij belde de uitgever op en legde hem het plan voor naast het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* een apart Supplement uit te geven, dat geheel gewijd zou zijn aan onderwijsbelangen en dat behalve boekbesprekingen artikelen zou bevatten die in het *NTW* niet zouden passen, zoals het artikel van Dijksterhuis. Noordhoff gaf zich na enig tegenstribbelen gewonnen, niet misschien

vanwege de verdiensten, maar vanwege de reclame; de boekbeoordelingen in het nieuwe supplement konden als het om eigen uitgaven ging toch alleen maar gunstig uitvallen, moet Noordhoff gedacht hebben. Wijdenes en de Amsterdamse leraar wiskunde J.H. Schogt zouden de redactie vormen.
Vlak voor de kerst van 1924 rolde het eerste nummer van het *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* bij alle abonnees van het *Nieuw Tijdschrift* en *Christiaan Huygens* in de bus. Het nummer opende met de brochure van Dijksterhuis. Omdat het nummer verder geen redactionele inleiding bevatte, kan men dit openingsartikel gevoegelijk als een beginselverklaring opvatten.


BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

Binnenland
2 cts.

Aan de N.V. Erven P. NOORDHOFF's
Uitgeverszaak

POSTBUS 39

Postbus . . . No. 39.
Giro Ned. Bank No. 1858.
Post-Giro . . . No. 6593.

GRONINGEN.

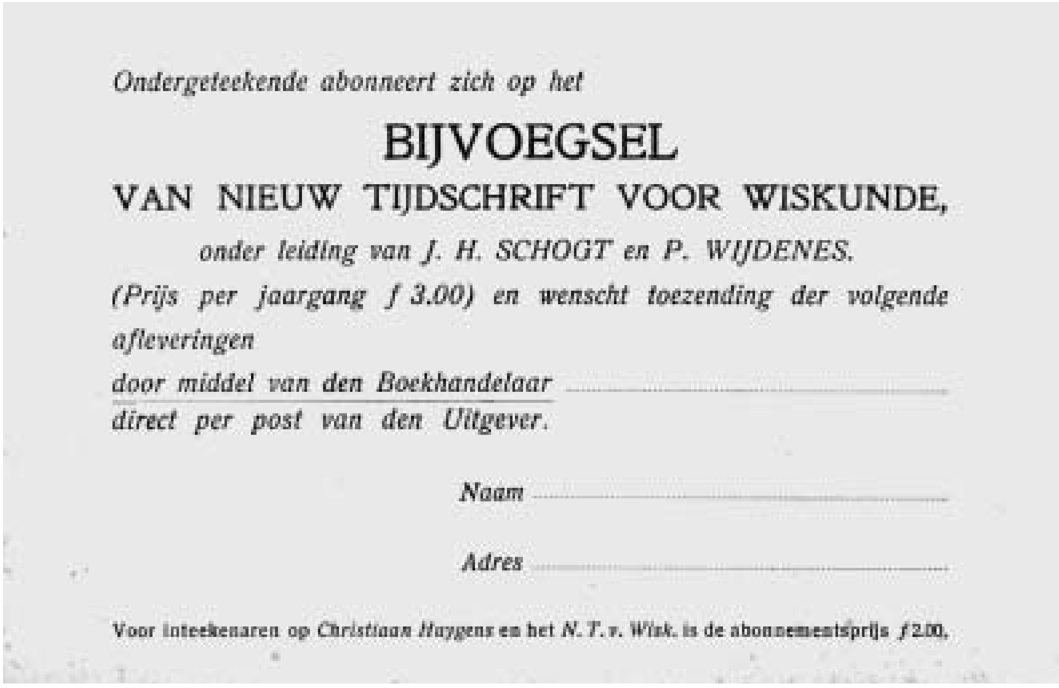
De commissie-Beth

Door zijn openingsartikel in het *Bijvoegsel* en een rede die hij kort daarna in Groningen over het meetkundeonderwijs had gehouden, had Dijksterhuis nadrukkelijk de aandacht op zich gevestigd en uit de vele positieve reacties op zijn stellingname was duidelijk geworden dat hij niet alleen stond. De zaak van het wiskundeonderwijs op de HBS begon zozeer de aandacht te trekken dat het college van inspecteurs bij het middelbaar onderwijs medio 1925 besloot een commissie in het leven te roepen die een onderzoek moest instellen naar de situatie bij het wiskundeonderwijs op de HBS en met voorstellen moest komen tot herziening en verbetering van het programma. Merkwaardig genoeg was het niet de wiskundige onder de inspecteurs, de Groninger Jensema, die het initiatief nam. Dr. Elibert Jensema, een stugge noorderling, boerenzoon uit Stedum en oud-directeur van de Rijks-HBS in Groningen, was een man van de oude stempel en moest niets hebben van de onderwijsvernieuwingen na de Eerste Wereldoorlog. Maar zijn collega G. Bolkestein, van huis uit een neerlandicus, had een andere kijk op het onderwijs en vond dat een studiecommissie hard nodig was.

Voorzitter van de commissie werd een politieke geestverwant van Bolkestein, de directeur van de Rijks-HBS in Deventer, H.J.E. Beth (1880-1952). De keuze voor Beth was bepaald een gelukkige. Beth die in Amsterdam wiskunde gestudeerd had en na zijn promotie in 1910 eerst enige jaren leraar in Almelo was geweest, was sinds 1922 directeur van de Rijks-HBS in Deventer. Hij had zich in de eerste jaargang van het *Bijvoegsel* geweerd tegen degenen die klaagden over het al te wiskundige karakter van de HBS, stond verder bekend als een voorstander van de vernieuwing van het wiskundeonderwijs in Nederland, maar wilde niet zo ver gaan als Dijksterhuis, die geen enkele concessie wenste te doen aan zijn ideaal van een strenge, zuivere wiskunde. Beth was bijvoorbeeld terughoudend als het erom ging in de hoogste klassen van de HBS al de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening in te voeren. Met hem als voorzitter en Dijksterhuis als secretaris kon men ervan verzekerd zijn dat de commissie met een duidelijk, maar niet extreem standpunt naar buiten zou komen. Aangezien het in verzuild Nederland onvermijdelijk was dat ook de katholieken en de protestants-christelijken in zo'n commissie vertegenwoordigd waren, werden J. van Andel, directeur van de Christelijke HBS in Den Haag, en P. Cramer, leraar aan de Rooms-Katholieke HBS in Rolduc, nog aan de commissie toegevoegd. Maar voor ingewijden was het duidelijk dat Beth en Dijksterhuis de drijvende krachten waren.

Dijksterhuis verzorgde met voortvarendheid de publiciteit rond de commissie. Hij stelde Wijdenes op de hoogte en vroeg hem of hij voor de berichtgeving over het werk van de commissie in het *Bijvoegsel* terecht kon. Wijdenes antwoordde op 28 oktober zonder bedenkingen: ‘Met de meeste belangstelling heb ik Uw bericht gelezen en U kunt volkomen over het *Bijvoegsel* beschikken.’ Het deed Wijdenes deugd dat twee medewerkers van het tijdschrift lid van de commissie waren geworden, Beth en Dijksterhuis.

‘Ons Bijvoegsel wil zijn de krachtige gids in het wiskundeonderwijs en niet de slappe slenter, die alles doet langs flauw gebogen [lijnen?] van slappe geleidelijkheid, synoniem met prulligheid, halfheid, lakschheid, kwalligheid. Waarom heb ik niet gevraagd als medewerkers Gunning, Reindersma, Kohnstamm, Mannoury, Casimir? Die zijn onze tegenvoeters en die hebben in Den Haag al genoeg te zeggen gehad. Dat U en Beth in de Commissie zitten zegt reeds genoeg; dat is reeds een aanwijzing voor de richting; geen dom conservatisme, maar - enfin, ik schei uit.’


Ondergeteekende abonneert zich op het

BIJVOEGSEL

VAN NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE,

onder leiding van J. H. SCHOGT en P. WIJDENES.

(Prijs per jaargang f 3.00) en wenscht toezending der volgende afleveringen

door middel van den Boekhandelaar ....

direct per post van den Uitgever.

Naam ....

Adres ....

Voor inteekenaren op *Christiaan Huygens* en het *N. T. v. Wisk.* is de abonnementsprijs *f* 2.00.

In januari 1926 berichtte Noordhoff Dijksterhuis nogmaals dat het *Bijvoegsel* tot zijn beschikking stond. De uitgever was bereid overdrukjes van artikelen van de commissie te maken en een aantal exemplaren daarvan te laten voorzien van apart omslag en titelblad, om kranten te bewegen er een bespreking aan te wijden.

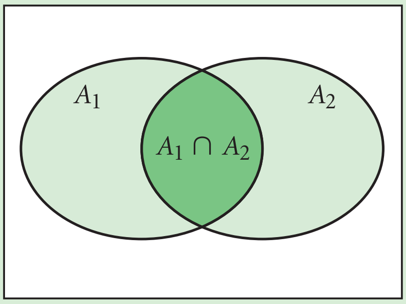
Een principieel rapport

Begin mei 1926 kwam de commissie met haar eigenlijke rapport over het wiskundeprogramma van de HBS. Op basis van schriftelijke préadviezen en mondelinge besprekingen was een gedetailleerd voorstel tot stand gekomen voor een herziening van het wiskundeonderwijs van de HBS. Weer was het *Bijvoegsel* het kanaal waarvan de commissie gebruikmaakte om haar bevindingen en voorstellen wereldkundig te maken.

Het rapport gaf voor elk van de vakken die tot de wiskunde gerekend werden (rekenkunde, algebra, goniometrie en trigonometrie, mechanica en kosmografie) een omschrijving met toelichting van de onderwerpen die naar het oordeel van de commissie per klas behandeld moesten worden. Daaraan vooraf ging een inleiding over de algemene principes die aan het opstellen van het programma ten grondslag hadden gelegen. De opstellers van het rapport namen als uitgangspunt dat de HBS een tweeledige doelstelling had: enerzijds het voorbereiden van de leerlingen op een onmiddellijke werkzaamheid in de maatschappij en anderzijds de voorbereiding op voortgezette studie in het hoger onderwijs. De HBS mocht echter net zo min een handelsschool worden als een voorbereidende school voor de studie in de exacte vakken. Daarom moest zij de leerlingen niet in de eerste plaats nuttige kennis bijbrengen, maar ‘ze moet zorgen, dat ze hun geest in voldoende mate vormt en ontwikkelt, om hen tot het verwerven der kennis, die ieder op zijn eigen terrein zal behoeven, in staat te stellen’.
Dat in zulk onderwijs wiskunde een kernvak was, meende de commissie niet meer te hoeven betogen; een verwijzing naar de Groningse rede van Dijksterhuis was daartoe voldoende. Dat betekende dat voor de wiskunde de vormende waarde van dat vak vooropstond; het aanbrengen van fundamentele theoretische inzichten, anders gezegd wiskundig inzicht, was belangrijker dan het ontwikkelen van technische vaardigheid. ‘Hoofddoel van het wiskundeonderwijs is het bij-

Het Principe van Inclusie en Exclusie

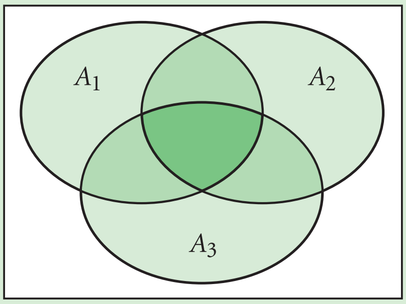
In de discrete wiskunde speelt het principe van inclusie en exclusie als bewijstechniek een belangrijke rol. Volgens dit principe tellen we het aantal elementen in een vereniging van verzamelingen door eerst de elementen in de afzonderlijke verzamelingen te tellen, vervolgens trekken we de dubbeltellingen er weer af, wat dan te veel is afgetrokken, de elementen in drievoudige doorsneden, doen we er weer bij, wat dan te veel is bijgeteld gaat er weer af, enz. Voor 2 verzamelingen volgt dit principe eenvoudig uit het onderstaande Venndiagram.



Principe van inclusie en exclusie (voor 2 verzamelingen)

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Hierbij is het aantal elementen in een verzameling A aangegeven door $|A|$. Ook voor 3 verzamelingen kan het principe afgelezen worden uit een Venndiagram.



Principe van inclusie en exclusie (voor 3 verzamelingen)

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

In zijn algemeenheid geldt het volgende:

Principe van inclusie en exclusie

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots \cup A_n| = {} & \\ & |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots \\ & + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ & - \ldots - \ldots - \ldots \\ & + \ldots + \ldots + \ldots \\ & (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ \ldots \ \cap A_n|\end{aligned}$$

Het algemene principe is niet meer eenvoudig te illustreren aan de hand van Venndiagrammen. De juistheid ervan is echter als volgt in te zien.
Zij $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Als x in k afzonderlijke verzamelingen voorkomt dan wordt x op de eerste regel precies k keer geteld, op de tweede regel $\binom{k}{2}$ keer, op de derde regel $\binom{k}{3}$ keer, enz.
In het totaal wordt x in het rechterlid dus

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + \ldots (-1)^k \binom{k}{k}$$

keer geteld. De uitwerking van $(1-1)^k$ met het binomium van Newton laat zien dat deze uitdrukking gelijk is aan 1. Kortom ieder element van de vereniging levert in het rechterlid een bijdrage van 1.

Als toepassing van het principe bewijzen we een stelling over de quotient-functie $\Phi(n)$ van Euler. Twee natuurlijke getallen heten relatief priem als ze behalve 1 geen gemeenschappelijke deler hebben. Zo zijn 24 en 35 relatief priem. Euler definieerde de functie $\Phi(n)$ als het aantal natuurlijke getallen kleiner dan n dat relatief priem is met n. De natuurlijke getallen kleiner dan 24 die relatief priem zijn met 20 zijn 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, en dus is $\Phi(20) = 8$. Voor een priemgetal p geldt uiteraard $\Phi p) = p - 1$. We bewijzen met het principe van inclusie en exclusie de volgende stelling:

Stelling 1 (Euler)
Als de ontbinding in priemfactoren van het getal $n > 1$ gegeven wordt door

$n = (p_1^{k_1})(p_2^{k_2}) \ldots (p_r^{k_r})$ dan
$\Phi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \ldots (1 - \frac{1}{p_r})$

Bewijs: De verschillende priemfactoren van n zijn $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Zij A_i de verzameling van alle natuurlijke getallen kleiner dan of gelijk aan n die deelbaar zijn door p_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Met behulp van het principe van inclusie en exclusie berekenen we het aantal getallen dat tot minstens een van de verzamelingen A_i behoren. Het aantal getallen kleiner dan n dat relatief priem is met n krijgen we dan door dit aantal van n af te trekken.

$$\begin{aligned}\Phi(n) = {} & n - |A_1| - |A_2| - \ldots - |A_r| \\ & + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_{r-1} \cap A_r| \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & + (-1)^r |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|\end{aligned}$$

Het aantal elementen in de doorsneden is eenvoudig te berekenen. Bij voorbeeld,

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k}$$

Aangezien de getallen kleiner dan of gelijk aan n die deelbaar zijn door p_i, p_j en p_k van de vorm

$$p_i p_j p_k,\ 2p_i p_j p_k,\ 3p_i p_j p_k, \ldots, \left(\frac{n}{p_i p_j p_k}\right) p_i p_j p_k = n$$

zijn, volgt het gestelde onmiddellijk.
Invullen van deze aantallen geeft

$$\Phi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \ldots - \frac{n}{p_r}$$

$$+ \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{r-1} p_r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}$$

Hetgeen gelijk is aan

$$\Phi(n) = n(1 - \tfrac{1}{p_1})(1 - \tfrac{1}{p_2}) \ldots (1 - \tfrac{1}{p_r})$$

daar uitwerking van de haakjes alle bovenstaande termen met het juiste teken oplevert.

Voor $n = 20 = 2^2 \cdot 5$ geeft de stelling $\Phi(n) = 20 \cdot (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 8$. Voor een priemgetal p volgt dat $\Phi(p) = p \cdot (1 - \frac{1}{p}) = p - 1$.

Rob Bosch

dragen tot geestelijke vorming en ontwikkeling', vatte het rapport samen, 'nevendoel het aanbrengen van nuttige kennis.' Wat betreft de keuze van de onderwijsmethode, de precieze volgorde en de oefenstof liet de commissie liever zoveel mogelijk over aan de docent; wat zij aanbood was slechts een minimumprogramma dat realiseerbaar was in het aantal uren dat de wiskunde in het vigerende programma had. Als er nieuwe onderdelen waren opgevoerd, was ervoor gezorgd dat er ruimte vrij was gekomen door iets anders te schrappen.

De reacties op het rapport waren, zoals ook viel te verwachten, van uiteenlopende aard. Individuele docenten in de wiskunde die zich in het *Bijvoegsel* of het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* uitten, waren doorgaans positief, en ook het bestuur van de kort voordien opgerichte Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan Hoogere Burgerschoolen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes Hoogere Burgerschoolen met 5-/6-jarigen cursus, dat op verzoek van de Groningse inspecteur Jensema het rapport aan de leden van de vereniging had voorgelegd, was over het algemeen positief gestemd. Maar buiten de kring van wiskundigen was de ontvangst op zijn best gemengd. De Vereeniging van Directeuren van Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus, die het rapport in juni 1926 aan haar leden voorlegde, kwam met een verslag dat zo niet in de conclusies dan toch wel in de toon afwijzend was. Op de vraag of men het voorgestelde programma 'overladen' vond, antwoordden 65 van de 88 reagerende leden (lang niet allen wiskundigen!) bevestigend, en op de vraag of men het programma geschikt vond voor de verschillende klassen van de HBS antwoordden

58 van de 88 leden ontkennend. Verder gaf het bestuur van de vereniging een lange lijst van (verder ongemotiveerde) kritiekpunten op onderdelen van het programma van de commissie-Beth. Omdat er door de leden van de vereniging ook positieve opmerkingen waren gemaakt en iedereen er wel van overtuigd was dat verandering van het leerplan noodzakelijk was, wilde het bestuur geen negatief oordeel uitspreken, maar het was duidelijk dat de directeuren niet enthousiast waren.

Alle in het *Bijvoegsel* gepubliceerde commentaren werden door de commissie van een reactie voorzien. Alleen over het verslag van de directeurenvereniging uitte de commissie haar regelrechte teleurstelling omdat de vragen die de vereniging haar leden voorgelegd had, nogal tendentieus waren en weinig ruimte voor nuances lieten: moest een directeur die het programma op één onderdeel te veeleisend vond het hele programma overladen noemen? Bovendien werd door deze vragen geen enkele discussie uitgelokt over de geest waarin het rapport was geschreven. Op de andere commentaren kon de commissie veel constructiever reageren en liever dan consequent het ontwerp-leerplan verdedigen koos men ervoor het naar aanleiding van het uitgelokte commentaar aan te passen. In het voorjaar van 1927 kwam de commissie met een aangepast leerplan.

Weer waren de reacties over het algemeen gunstig. Wijdenes, die alles van een afstand had gevolgd, was zelfs enthousiast en spoorde Beth en Dijksterhuis aan nu een handleiding te schrijven voor leerboeken die in de geest van hun rapport zouden moeten worden geschreven. Maar ondanks deze gunstige ontvangst leidde het rapport van de commissie-Beth niet tot aanpassing van het leerplan. Het definitieve rapport werd ingeleverd, maar van de kant van de inspecteurs kwam geen reactie; de leden van de commissie kregen zelfs geen ontvangstbevestiging en naar een onkostenvergoeding konden zij fluiten. Jensema, die al tegen de instelling van de commissie was geweest, blokkeerde alles. In 1929 werd mechanica weer een verplicht onderdeel van het onderwijs in de hoogste klas van de HBS, maar voor het overige bleef alles bij het oude. Maar het werk van de commissie had ook een ander en niet minder belangrijk effect. Het malaise-gevoel dat de wiskundigen in Nederland in het begin van de jaren twintig beheerst had, was mede dankzij de inspanningen van Beth en Dijksterhuis verdwenen. Hoewel de weerstand tegen de wiskunde allerminst verdwenen was, hadden de wiskundigen hun zelfvertrouwen herwonnen. Nadat de leraren in de exacte vakken op het gymnasium zich al in 1921 tijdens het toen gehouden Natuur- en Geneeskundig Congres verenigd hadden in een eigen organisatie, een onderafdeling van het Genootschap die door het leven ging als Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea), sloten hun collega's op de HBS zich eind 1925 aaneen in Wimecos (Leraren in wiskunde, mechanica en cosmografie). Een duidelijke uiting van het herwonnen zelfvertrouwen was ook dat op een vergadering van redactie en medewerkers van het *Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* op 4 juni 1927 werd besloten het tijdschrift te herdopen in *Euclides, Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken.* Die naam was natuurlijk een programma.

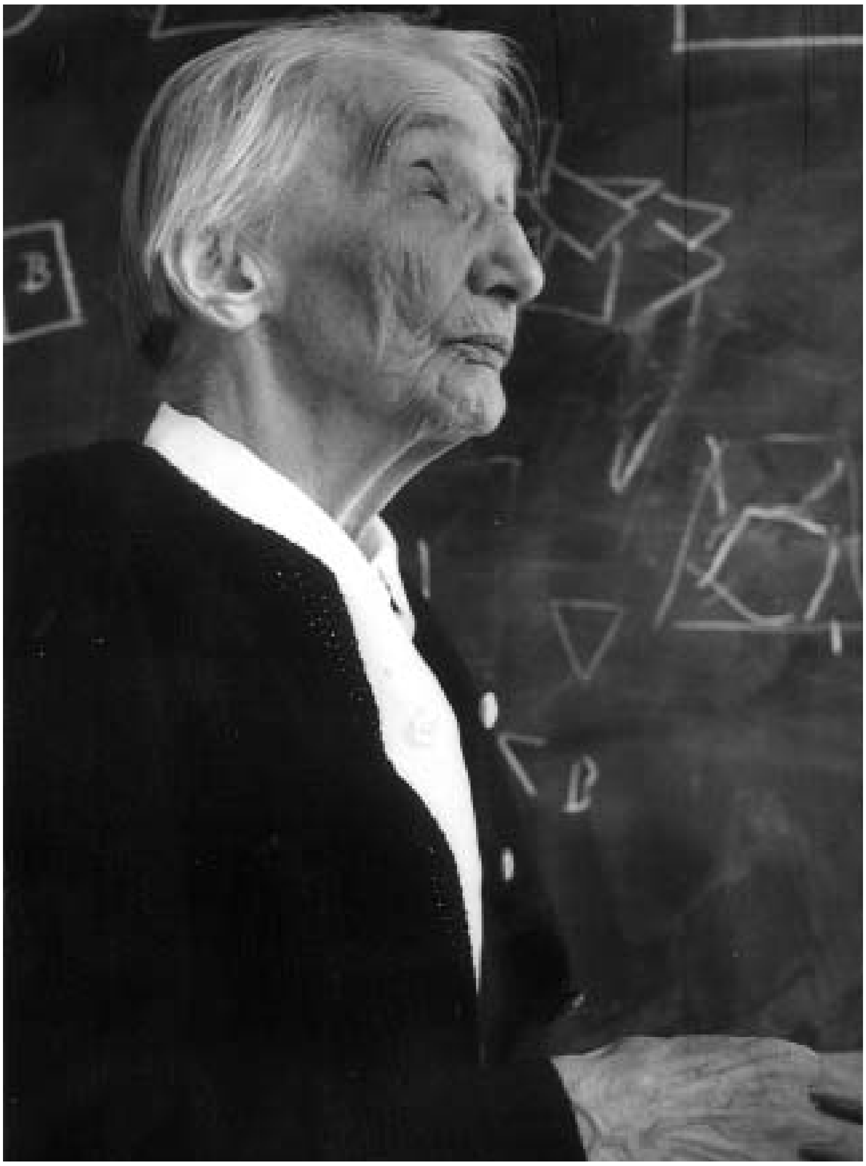
* Bekorte versie van een deel van het hoofdstuk 'Terug naar Euclides' uit:
Klaas van Berkel
Dijksterhuis. Een biografie
Amsterdam: Bert Bakker, 1996
p. 121-142. Daar ook de hier weggelaten annotatie.

Historische wiskundeteksten

Op onderstaande website staan allerlei historische bronnen, onder andere de brochures die zo centraal staan in dit nummer van Euclides.
In het register staan Dijksterhuis en Ehrenfest vriendschappelijk onder elkaar.
www.math.sci.kun.nl/math/werkgroepen/gmfw/bronnen

Wat wilde Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa?

Ed de Moor



Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa (rond 1956)

Inleiding

Aan het begin van de twintigste eeuw begon, mede onder invloed van de groei van het voortgezet onderwijs, de didactiek van de wiskunde zich pas echt te ontwikkelen. De behoefte tot vernieuwing kwam echter niet direct van de wiskundeleraren zelf. Het 'nieuwe denken' werd vooral gevoed door opvattingen, die zich aan het eind van de negentiende eeuw via de pedagogische Reformbeweging of Nieuwe Schoolbeweging aankondigden. Echter ook in universitair-wiskundige kringen ontstond interesse voor het onderwijs op de middelbare scholen. Zo werd in 1908 tijdens het vierde Internationale Congres van Wiskundigen te Rome de CIEM (Commission Internationale de l'Enseignement Mathematique) opgericht. De beroemde Felix Klein (1849-1925) werd hiervan de eerste voorzitter. Het eerste dat men toen ter hand nam, was het aanvankelijk meetkundeonderwijs, dat nog altijd gestoeld was op de *Elementen* van Euclides. In die tijd kwam ook het denkpsychologische onderzoek op gang, waaruit bleek dat kinderen rond hun twaalfde levensjaar in het algemeen nog niet in staat zijn formeel-logische redeneringen te voltrekken. Bedenken we ons ten slotte dat er na de Eerste Wereldoorlog in West-Europa een zekere anti-mathematische stemming heerste, dan wordt de discussie, die zich in 1924 voltrok tussen Tatiana Ehrenfest-Afanessjewa (1876-1964) en Eduard Jan Dijksterhuis (1892-1965) daarmee ook in een historisch-maatschappelijk decor geplaatst.
Het was de brochure *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* van mevrouw Ehrenfest, zoals zij later altijd genoemd zou worden, die in 1924 de pennenstrijd met Dijksterhuis veroorzaakte en die de directe aanleiding is geweest voor de

oprichting van het *Bijvoegsel van Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, dat over didactische vraagstukken handelde en dat later tot het tijdschrift *Euclides* omgedoopt werd. Wie was deze mevrouw Ehrenfest, die later een van de belangrijkste wiskundedidactici van Nederland zou worden?

Tatiana Afanassjewa, geboren in het Russische Kiev, groeide op en studeerde in St. Petersburg. In het toenmalige Mekka van de wiskunde, het Duitse Göttingen, waar zij bij Felix Klein en David Hilbert studeerde, leerde zij haar man, de Oostenrijkse fysicus Paul Ehrenfest (1880-1933), kennen. In 1912 kwamen zij naar Leiden, waar Paul Ehrenfest de opvolger werd van de grote Hendrik Lorentz. Zij kwam in contact met Willem Reindersma (1877-1946), die wiskundeleraar was aan het Nederlandsch Lyceum te Den Haag en toen al een vernieuwend meetkundeboek op zijn naam had staan. Al spoedig vonden er onder mevrouw Ehrenfests leiding didactische bijeenkomsten plaats. In 1915 verscheen in het *Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs* haar eerste artikel in het Nederlands, dat toen al aandacht trok. En in 1924 volgde de brochure *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?,* die Dijksterhuis zijn pen deed grijpen.

De ideale meetkundecursus volgens Tatiana Ehrenfest

Pogingen om de didactiek van het aanvankelijk meetkundeonderwijs te verbeteren waren in het begin van de twintigste eeuw al verschillende malen ondernomen. Passend bij die tijd lag het accent veelal op het activiteitsbeginsel (leren door doen), waarmee zowel het zelfstandig werken als het concrete handelen van de leerling werd bedoeld. Doel was de schoolmeetkunde door middel van een informele inleiding te ontdoen van de voor de twaalfjarige kinderen lastige axiomatische start. De ideeën van mevrouw Ehrenfest sloten hier wel bij aan, maar waren toch van fundamenteler aard. De uitwerking, die zij in haar *Übungensammlung* uit 1931 hieraan gaf, toont het unieke karakter van haar ideeën aan. Toch treffen we de essenties


T. Ehrenfest.

PAEDAGOGIESE VOORDRACHTEN

WAT KAN EN MOET

HET MEETKUNDE-ONDERWIJS

AAN EEN NIET-WISKUNDIGE GEVEN

DOOR

T. EHRENFEST—AFANASSJEEWA

f 0,75

BIJ J. B. WOLTERS' U. M. — GRONINGEN, DEN HAAG, 1924

De gewraakte brochure uit 1924

van deze opvattingen al in haar brochure uit 1924 aan.
Zij maakte onderscheid tussen Ruimteleer en Axiomatiek. Met het eerste bedoelde zij het 'begrijpen' van de ruimte en het kunnen toepassen van dit begrip, het tweede betreft de meetkunde als een formeel logisch systeem van definities, axioma's en stellingen. Zij onderscheidde drie stadia in het onderwijsleerproces voor een totale leergang meetkunde voor leerlingen van tien tot achttien jaar. Het meetkundeonderwijs moest beginnen met een zogenoemde *propedeutische* of inleidende *cursus* (10 tot 12 jaar), daarna diende een *meer systematische cursus* (12 tot 16 jaar) te volgen om ten slotte met een strikt *axiomatische leergang* (16 tot 18 jaar) te besluiten.
In de propedeutische cursus diende de 'intuïtie' centraal te staan. Over het verschil tussen 'intuïtie' en 'logisch werken' schreef zij het volgende:
"Bij ieder verwerven van inzicht zijn twéé stappen uit elkaar te houden: het *zien* van een zekeren trek in het beeld, dat we in ons hoofd hebben, en het *zich bewustworden* daarvan. Het element van "zich bewust worden" speelt een voorname rol bij al de verschillende stappen van het denkproces: bij het vaststellen en het ordenen van hetgeen aanvankelijk ons intuïtieve beeld voorstelt, bij het ontdekken van gapingen en tegenstrijdigheden erin, bij het trachten om die gapingen aan te vullen en bij het nagaan van den oorsprong dier tegenstrijdigheden. Dit alles noem ik nu het *"logische" werk*. Datgene, *wat* zoo bewerkt wordt (of ook soms onbewerkt blijft), noem ik *"intuïtie"*. Het ontwaren van iets zonder er zich rekenschap van te geven en ook het ordenen daarvan zonder bewustwording reken ik tot de *"intuïtieve" werkzaamheid*."
De gegeven omschrijving van het begrip intuïtie blinkt niet uit door helderheid. Zij bedoelde echter dat uitgegaan moet worden van meetkundige noties, die de kinderen al op natuurlijke wijze in de realiteit hebben verworven. Daarbij diende vooral het voorstellingsvermogen -het vormen van mentale beelden zouden wij thans zeggen- ontwikkeld te worden. Deze intuïtieve werkzaamheid werd niet alleen van belang geacht voor het verwerven van begrippen en relaties tussen die begrippen, maar werd zelfs als een noodzakelijke voorwaarde gezien voor datgene waar het mevrouw Ehrenfest in feite om ging: *leren denken*, hetgeen zij zelfs tot een credo had verheven: 'Zonder intuitie is geen denken mogelijk'.
Deze intuïtieve start zou een betere basis leggen voor een later meer formele aanpak van het meetkundeonderwijs. Dit laatste hield in dat in de *systematische cursus* meer nadruk op het *logische werk* moest komen te liggen. Niet volgens de traditionele euclidische opbouw, maar aangepast aan het niveau van de kinderen. Praktisch betekende dit, dat evidente stellingen (zoals: de basishoeken van een gelijkbenige driehoek zijn gelijk) niet bewezen werden, maar voorlopig als aanschouwelijke evidenties (axioma's) werden opgevat. Verder dat de leerlingen zelf -overigens wel onder leiding van de leraar- de stellingen dienden te formuleren én bewijzen. En ten slotte dat de inhoud van de cursus zo beknopt mogelijk diende te zijn. Alles diende in het teken te staan van de essentie van de theorie. Daartoe zouden ketens van stellingen opgebouwd moeten worden, ook wel stambomen genoemd, waarvan een voorbeeld in het boek van Reindersma is te vinden. Dit opbouwen van zo'n beperkt stukje theorie wordt tegenwoordig wel 'lokaal deductief redeneren' genoemd.
We zien dus, dat mevrouw Ehrenfest grote waarde toekende aan het leren denken. 'Denken' betekende voor haar het zelfstandig opstellen van premissen en het zelfstandig trekken van oordelen daaruit. De toen bestaande opvattingen over leren denken, waarbij de premissen (de euclidische axioma's) gegeven zijn en de reeds geformuleerde stellingen moeten worden afgeleid, noemde zij 'rekenen': '(…) een in syllogismen geformuleerd bewijs (is) een *teeken (…)*, dat men de stof (…) voldoende doordacht heeft. Het is echter onjuist, dat de syllogismen het *instrument* zelf van het denken zijn.'
Haar opvatting dat constructie van kennis te prefereren is boven reproductie doet heel modern aan. Maar tevens hechtte zij belang aan het opbouwen van een formeel-logisch systeem, zoals blijkt uit het volgende citaat: 'De kennismaking met de Axiomatica en ook met vragen van kennistheoretischen aard (natuurlijk niet in overdreven mate) zou veel meer op haar plaats zijn na de beëindiging van den systematischen cursus der Ruimteleer'. Zij achtte het 'van grote *praktische* beteekenis, dat iemand zich niet alleen voor de juistheid van zijn opvattingen, maar ook voor den oorsprong en de logische reden daarvan interesseert.' In dit verband zij er aan herinnerd, dat de studie van de grondslagen van de wiskunde in het begin van deze eeuw een grote vooruitgang had geboekt en dat mevrouw Ehrenfest deze ontwikkelingen van zeer nabij had meegemaakt, waarbij zij met name gefascineerd was door de ontdekking van de niet-euclidische meetkunden met hun eigen axiomastelsels en bijbehorende modellen. Juist dit laatste zag zij ook als een mogelijk onderwerp van studie voor de middelbare school.
Bij herhaling benadrukte zij het programma niet te overladen; liever het essentiële diepgaand behandeld dan veel op een opper-

vlakkige wijze. In de door haar voorgestane propedeutische cursus diende ook plaats te zijn voor concreet handelend werk, zoals meten, tekenen, knippen en plakken. Maar dit empirische werk - zelf sprak zij van de laboratoriummethode - mocht geen doel op zich worden. Het diende altijd in dienst te staan van de ontwikkeling van het voorstellingsvermogen en gepaard te gaan met de denkhandelingen. Helaas werd dit uitgangspunt nog al eens verkeerd begrepen, waardoor een intuïtieve cursus -soms enigszins denigrerend- gelijk gesteld werd met louter plakken en knippen. Haar brochure sloot af met een aantal voorbeeldvraagstukken, dat later uitgebreid werd in de *Übungengsammlung.*

Dijksterhuis' reactie

Ook in Eduard Jan Dijksterhuis ontmoeten we een bijzonder mens: intelligent en van een buitengewone eruditie. Als wetenschapshistoricus verwierf hij wereldfaam. Ten tijde van de discussie was hij wiskundeleraar te Tilburg. Zijn bijdragen aan het wiskundeonderwijs bepaalden zich in hoofdzaak tot de uitgangspunten, doelstellingen en programmatische uitwerking. De geleerde, nauwgezette, handwerkende en met de pen vaardige Dijksterhuis was geknipt voor allerhand commissiewerk, dat hij vele malen op zich nam. De toen heersende anti-wiskundige tijdgeest met het gevolg dat men in sommige kringen de wiskundeprogramma's wilde beknotten -voor enkele schooltypen zelfs afschaffen- beviel hem geenszins. In het bijzonder stuitte hem het streven naar een informele start van het meetkundeonderwijs tegen de borst.

Het was daarom niet verwonderlijk dat hij de pen opnam tegen mevrouw Ehrenfest met het openingsartikel van wat we nu maar het allereerste nummer van *Euclides* zullen noemen. 'Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?' schreef hij boven dit stuk. Verder volgde nog een weerwoord van mevrouw Ehrenfest, direct gevolgd door het 'laatste woord' van Dijksterhuis. Het zal niet verbazen, dat Dijksterhuis zich door mevrouw Ehrenfests brochure 'in zijn meest fundamenteele mathematische overtuigingen (voelde) aangetast'. Het antwoord op de door hem zelf gestelde vraag was dan ook een hartgrondig en onomwonden *neen.*

Het omvangrijke, nog immer zeer leesbare artikel, is een felle, in scherpe bewoordingen gestelde kritiek op mevrouw Ehrenfests opvattingen. Niet alleen betreffende enkele vorm- en begripskwesties, maar vooral ten aanzien van de feitelijke strekking van het geschrift. Dit betrof op de eerste plaats het feit dat Dijksterhuis bezwaren had tegen het aannemen van evidente stellingen. Dit zou tot een verkeerde habitus kunnen leiden, waardoor het meetkundeonderwijs zou worden ontdaan van het belangrijke doel, namelijk *leren redeneren.* Het tweede bezwaar richtte zich op de door Ehrenfest zo belangrijk geachte intuïtieve ontwikkeling van het ruimtelijk inzicht. Weliswaar erkende ook

2. *Het vervolgen van de rechte lijn tot in het oneindige.*
Zich duidelijk de rechte lijn voorstellen, die door twee bepaalde punten in de kamer loopt. Waar doorboort ze de muren of het plafond en den vloer van de kamer? Hoe loopt ze verder door de daarboven of daarnaast liggende kamers? — en nog verder? Toelichten aan doozen, die zoo, als de kamers, aan elkaar zijn gelegd. Hoe ligt de lijn ten opzichte van de rotatieas van de aarde? Toelichten aan den globus.

3. *De rechte lijn als de kortste afstand tusschen twee punten in de ruimte.*
Een gespannen touw tusschen twee punten, als er niets tusschen ligt en als een voorwerp zich daartusschen bevindt — zich den vorm van het touw in beide gevallen voorstellen. Een gespannen touw op een oppervlak. De kortste afstand tusschen twee plaatsen op de aarde — door den aardbol heen gemeten of langs het oppervlak. In welke richting loopt de kortste verbindingslijn (*op* het aarde-oppervlak) tusschen Rotterdam en Batavia (Zuid, Oost, Noord, West?) Aan den globus vaststellen! Geodetische lijnen op verschillende oppervlakken.

4. *De lichtstraal als rechte lijn.*
Als ik door twee gaatjes naar een punt wil kijken, hoe moeten de gaatjes dan gelegen zijn? Wat moet eraan veranderd worden, wanneer ik tusschen die beide gaatjes een glazen prisma inschuif?
De vorm der schaduw van een voorwerp. De schaduwruimte, haar begrenzing — de kegelmantel.

Voorbeelden voor de intuïtieve inleiding (uit de brochure uit 1924)

Dijksterhuis het belang van een zekere intuïtieve fase, maar hij meende dat 'meetkundig denken

E.J. Dijksterhuis

(ook) mogelijk is zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen'. Als voorbeeld haalt hij de 'stereometrische constructies' aan, die alleen door middel van redeneringen op te lossen zijn, zoals 'Gevraagd moge worden een rechte *x* te construeren, die twee gegeven kruisende rechten l en m onder gelijke hoeken kruist, die evenwijdig is aan een vlak *V* en twee gegeven kruisende rechten *p* en *q* snijdt.' Voor de zwakkere leerling zag hij dit zelfs als een goede oefening in het leren redeneren, zo argumenteerde hij:

'Men kan juist den niet wiskundig aangelegden leerling geen sterkeren moreelen steun geven, dan wanneer men hem de overtuiging weet bij te brengen, dat alles wat hij op H.B.S. van wiskunde heeft te leeren (…) voor hem bereikbaar is door zuiver logisch redeneeren en dat een goed voorstellingsvermogen weliswaar voor hem, die het bezit, een machtig hulpmiddel vormt, maar dat het gemis aan dat vermogen nooit een onoverkomelijk struikelblok kan zijn.'

Dijksterhuis beweerde dat mevrouw Ehrenfests artikel eigenlijk niets nieuws ter tafel bracht. Haar opvattingen over intuïtie en logica zag hij als vertalingen van Schopenhauers 'Anschauung' en 'Urtheilskraft'. Verder gaat hij in op het onderscheid tussen 'axiomatica a priori' en 'axiomatica a posteriori'. Ten slotte vat Dijksterhuis de grote lijn van Ehrenfests betoog samen met het volgende syllogisme: 'Geen denken is mogelijk zonder intuïtie. Intuïtie is in de Ruimteleer identiek met ruimtelijk voorstellingsvermogen. Dus is geen meetkundig denken mogelijk zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen.' En omdat 'meetkundig denken (juist wel) mogelijk is zonder ruimtelijk voorstellingsvermogen' achtte hij mevrouw Ehrenfests betoog op mathematische wijze weerlegd. Dijksterhuis bleef dus hechten aan een strak logisch-deductieve opbouw. Hij achtte de synthetische meetkunde, eerst planimetrisch, daarna in de ruimte, daartoe hèt geijkte middel, ook voor de allerjongste kinderen in het voortgezet onderwijs. Verder beriep hij zich

voor zijn standpunt op de historische betekenis, zowel van de euclidische meetkunde zelf als van de onderwijskundige traditie en ook op het esthetische aspect. De opvoedende waarde, zoals het kweken van discipline en karaktervorming, werd hogelijk door hem geprezen, maar bovenal was het aspect van de vormende waarde, die er van het wiskundeonderwijs uit zou gaan, zijn leidend motto: 'wat ik als doel van het meetkundeonderwijs zie, oefening in zuiver denken en spreken (…)'.
In mevrouw Ehrenfests antwoord aan Dijksterhuis werd een aantal punten opgehelderd. Zij benadrukte nog eens het belang van de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen, dat zij in zekere zin equivalent met Anschauung beschouwt, en het belang van het leren zien van het essentiële als voorwaarde voor het praktische logische denken.
Dijksterhuis kreeg het laatste woord. Hij komt weer terug op zijn syllogistische redenering, waarbij hij ruimtelijk voorstellingsvermogen en intuïtie als synoniemen bij mevrouw Ehrenfest had aangemerkt. Verder blijft hij vasthouden aan de eerder genoemde argumenten en voert opnieuw de klassieke ode aan de euclidische meetkunde op: 'een gebouw van zoo groote schoonheid en (…) van zoo harmonische soliditeit, dat het iederen mensch geestelijk goed moet doen, daarin eenige tijd te verwijlen.'

Inderdaad was mevrouw Ehrenfest niet ingegaan op de door Dijksterhuis gesuggereerde equivalentie van ruimtelijk voorstellingsvermogen en intuïtie (het Latijnse 'intueri' betekent onder meer 'met de geest nauwkeurig beschouwen'). Wanneer zij dat gedaan had, was de discussie ontaard in een academische woordenstrijd onder voorbijgaan aan de werkelijke bedoeling van mevrouw Ehrenfests standpunt. De feitelijke standpunten lagen echter zo wijd uiteen, dat de kloof al bij voorbaat onoverbrugbaar leek of zoals zij het toen uitdrukte: 'de heer D. wil niet gelooven, dat door den omgang met het aanschouwelijke materiaal van een propaedeutischen cursus het ruimtelijk voorstellingsvermogen van de leerlingen in belangrijke mate kan worden ontwikkeld (…)'.

Analyse der geschilpunten

In 1924 zocht mevrouw Ehrenfest de reden voor het verschil in opvatting onder meer in een kwestie van smaak. Dit kan te maken hebben met de meer natuurkundige instelling en achtergrond van mevrouw Ehrenfest tegenover de zuiver wiskundige houding van Dijksterhuis, maar wij zouden ons ook kunnen voorstellen dat mevrouw Ehrenfest het argument van smaakverschil aanvoerde als een beleefdheidsfrase.
Dijksterhuis was, althans later, op de hoogte van de internationale ontwikkelingen. Over deze buitenlandse ontwikkelingen was hij teleurgesteld, wanneer hij vernam dat ook vermaarde geleerden als Klein, Borel en Poincaré zich op het standpunt van een informele inleiding de meetkunde stelden. Zelfs in zijn eigen kring sprak H.J.E. Beth zich uit voor een niet al te formele start, zij het dat we dan al weer bijna tien jaar verder zijn. Toen herzag ook Dijksterhuis zijn standpunt enigermate, zoals blijkt uit een artikel uit 1934 over het door hem voorgestane epistemische (inzichtelijk) onderwijs, waarin hij onder meer schreef:
'Men kan zich (...) een heele scala van opvattingen voorstellen, die tusschen het standpunt van mevr. Ehrenfest en dat van J.H. Schogt als uitersten inliggen en die men toch alle epistemisch zou kunnen noemen. Persoonlijk zou ik er het meest voor voelen, in de beginstadia van het meetkunde-onderwijs wel vrij spoedig deductief te werk te gaan door stellingen te bewijzen, maar alleen dan, wanneer een bewijsbehoefte òf spontaan optreedt, òf door het stellen van de vraag, gemakkelijk kan worden gesuggereerd. (…) Na eenigen tijd wordt het dan al mogelijk en wenschelijk, tot een partieele ordening van stellingen te komen (…). Ik zou dan echter het meetkundeonderwijs niet willen laten eindigen, zonder dat de basis nog eens opnieuw in behandeling is genomen, d.w.z. ik zou de beginselen der vlakke meetkunde in de hoogere klassen, eventueel gelijktijdig met die der stereometrie, nog eens in een correct logisch systeem willen ordenen, waarin dan axiomata nog wel uitdrukking zouden zijn van meetkundige inzichten, die voor het natuurlijke denken intuïtief evident zijn, maar waarin hun aantal zoveel mogelijk zou worden beperkt en het bewijzen uitsluitend als kriterium voor logische ordening zou dienen.'
Afgaande op dit citaat zou men kunnen zeggen dat de opvattingen van mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis niet strijdig waren. Beiden hadden eenzelfde einddoel voor ogen: inzicht in een axiomatische opbouw van de meetkunde, en wel aan het eind van de gehele cursus, dus voor de leeftijdsgroep van 16 tot 18 jaar. Mevrouw Ehrenfest ging daarin zelfs nog verder dan Dijksterhuis, waar zij ook pleitte voor eventuele bestudering van niet-euclidische axiomastelsels.
Zowel Dijksterhuis als mevrouw Ehrenfest geloofden in de scholing van het denken door middel van de meetkunde. Beiden stonden een inzichtelijk wiskundeonderwijs voor. En midden jaren dertig blijken beiden zich uit te spreken voor een aanschouwelijke start. Het grote verschil lag in de uitwerking. Dijksterhuis nam de traditionele

euclidische vlakke meetkunde als uitgangspunt, terwijl mevrouw Ehrenfest om didactische redenen de ruimtelijke realiteit als startpunt koos teneinde de elementaire meetkundige noties te ontwikkelen. Mevrouw Ehrenfest wilde het keurslijf van de euclidische opbouw afleggen, terwijl Dijksterhuis slechts een minieme knieval wilde doen voor het aanschouwelijke element van de meetkunde. Dijksterhuis hield dus ook voor het aanvangsonderwijs vast aan de logische structuur van de meetkunde, terwijl Ehrenfest uit wilde gaan van een psychologische ordening, waarbij rekening gehouden werd met de cognitieve ontwikkeling van de leerling. Bij Ehrenfest herkennen we zowel het historisch- als het psychologisch-genetische principe, terwijl Dijksterhuis dit geheel vreemd scheen te zijn. Mevrouw Ehrenfest benadrukte voor haar propedeutische cursus het principe van 'leren door doen'. Ook in concreet praktische zin, iets waarover Dijksterhuis zich nimmer openlijk heeft uitgelaten. Wij vermoeden echter, gezien zijn welbevinden in louter theoretische wetenschap, dat hij daaraan weinig waarde hechtte. In feite school het verschil in beider opvattingen slechts in het idee van de propedeutische cursus van mevrouw Ehrenfest. Dijksterhuis hield bij zijn beschouwingen altijd het oog gericht op de HBS- en Gymnasium-leerlingen en naar onze mening daarvan weer de meest begaafden, terwijl mevrouw Ehrenfest toch aan een meer heterogeen samengestelde groep dacht. Tijdens de promotie van Dina van Hiele-Geldof in 1957, die een praktische vorm aan mevrouw Ehrenfests ideeën had gegeven, sprak Dijksterhuis zeer waarderend over dit onderwijsexperiment en noemde het 'een stuk pionierswerk'. Zou het beleefdheid geweest zijn of was Dijksterhuis toen op het punt van de intuïtieve inleiding bijgedraaid?
Gezien door de bril van het heden lijkt het wat wonderlijk dat Dijksterhuis zich in de jaren twintig zo opwond over de ideeën van een propedeutische cursus à la Ehrenfest, die hij als een werkelijk gevaar zag voor het wiskundeonderwijs. Mogelijk dat mevrouw Ehrenfest toen te weinig benadrukt heeft dat zij met de propedeutische cursus slechts een inleiding op het oog had, die ook, althans voor een deel, geschikt was voor de lagere school. Een voor de hand liggende reden kan gezocht worden in het feit, dat Dijksterhuis elke vorm van toepasbaarheid of samenhang met de realiteit uit de wiskunde wilde weren. Tenslotte was hij een Platonist van het zuiverste water. Het is Henk Klomp geweest, die hier in 1997 in zijn dissertatie op gewezen heeft. Volgens Klomp kan hieruit de essentie van Dijksterhuis' opvattingen verklaard worden:
'Het onveranderlijke, intellectuele van de westerse beschaving was volgens Dijksterhuis een kennisideaal van Griekse (platoonse) origine: het zich voortdurend zeer zorgvuldig rekenschap kunnen geven van denkbeelden, het in staat zijn te definiëren, te bewijzen en te motiveren, met andere woorden: de abstracte wiskundige denkvorm.'
Bij deze opvattingen, die Dijksterhuis door de *Politeia* van Plato lijken ingegeven, althans herkend, past ook zijn geringschatting van het empirisch-inductieve handelen en denken. Maar ook zijn morele opvattingen over discipline en opvoeding zijn hieruit te verklaren. Er moesten eisen aan het kinderlijke denken gesteld worden, maar een dialoog was slechts voorbehouden aan de volwassenen, die Plato's denkschool doorlopen hadden. Hiermee is ons inziens de kern van het 'geschil' tussen de democratische mevrouw Ehrenfest en de meer elitair-denkende Dijksterhuis blootgelegd.
Daarom ook was de periode vóór de Tweede Wereldoorlog nog niet rijp voor veranderingen op grotere schaal. In feite werden noch de ideeën van Dijksterhuis noch die van mevrouw Ehrenfest in praktisch onderwijs omgezet. In de modale onderwijspraktijk werd gebruik gemaakt van modale boeken van een of andere logisch-deductieve snit. Wel werd door de in 1936 opgerichte Wiskunde Werkgroep aan de vernieuwing van de didactiek doorgewerkt. Het werk van mevrouw Ehrenfest, in het bijzonder haar *Übungensammlung*, bleek daarbij een belangrijke leidraad en bron van inspiratie. Het zou echter nog bijna een halve eeuw duren voor de effecten hiervan in de huidige kijkmeetkunde vorm zouden krijgen.

Literatuur

Dit stuk is gebaseerd op een deel van een hoofdstuk uit **Van vormleer naar realistische meetkunde** (Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw) van *E.W.A. de Moor* (1999). In dit boek zijn alle annotaties en relevante literatuur over dit onderwerp te vinden. Het is te bestellen bij het Freudenthal Instituut (030-2611611).

De werkgroep HBO van de NVvW

In januari 1999 kwamen ruim 150 wiskundedocenten uit het gehele HBO in een conferentie bijeen. Het was de eerste keer in de historie dat dit gebeurde maar er waren dan ook duidelijke aanleidingen. Bijvoorbeeld het signaal dat het vak wiskunde op een aantal HBO-instellingen als zelfstandig vak dreigt te verdwijnen als gevolg van de recente invoering van projectonderwijs en probleem-gestuurd onderwijs. Of het signaal dat wiskunde in bepaalde HBO-sectoren in een isolement is geraakt met ook nog eens een slecht imago (moeilijk, saai, lage cijfers), waardoor het vak slachtoffer dreigt te worden van de op rendement en bezuinigingen beluste hogeschoolmanagers.

In het uitgebreide verslag van de januari-conferentie (te vinden op de website van de NVvW) wordt uitvoerig ingegaan op de problematiek waar de wiskundedocent in het HBO zich vlak voor de eeuwwisseling voor gesteld ziet.
Eén van de conclusies van de conferentie was dat de wiskundedocent in het HBO niet moet afwachten of en hoe zijn vak wordt gesaneerd, maar met eigen initiatieven moet meewerken aan de ontwikkeling van modern onderwijs, gericht op realisatie van opleidingseindtermen. En dat niet alleen door te onderzoeken of en hoe de wiskunde kan worden toegepast in projecten en andere vakken, maar ook door het imago van het vak te verbeteren door gebruik te maken van moderne hulpmiddelen zoals computeralgebra.

Om docenten daarbij te kunnen helpen is vrij snel na de januari-conferentie een werkgroep HBO opgericht onder de vlag van de NVvW. Deze werkgroep bestaat uit docenten uit vrijwel alle HBO-sectoren (Techniek, Economie, Lerarenopleidingen, Informatica). Er is een ambitieus werkplan opgesteld waar in subwerkgroepen aan gewerkt zal worden. De werkgroep fungeert als de stuurgroep. Van hieruit zullen de subwerkgroepen aangestuurd worden. Verder zal de stuurgroep een databank aanleggen met alle voor de HBO-wiskundedocent relevante gegevens. Zo wordt de HBO-wiskunde (inclusief de docenten) in kaart gebracht. De werkgroep heeft verder een lijstje met mogelijke activiteiten opgesteld, zoals:
- Literatuuronderzoek, alsmede het schrijven van recensies.
- Het volgen van de ontwikkelingen van de wiskunde in het voortgezet onderwijs, het vbo, of het mbo.
- Het bijhouden van een vacaturebank.
- Het schrijven van persberichten en/of nieuwsbrieven (eventueel via Euclides).
- Telematiseren van cursussen.
- Contact onderhouden met instellingen zoals Surfdiensten, CAN-diensten, Axis enzovoorts, onder andere over het verwerven van subsidies en/of kortingen.
- Organisatie van discussiegroepen over internet.

De voorzitter van de werkgroep HBO is Metha Kamminga-van Hulsen (kamminga@tech.nhl.nl), en zij heeft zitting in het bestuur van de NVvW.

De *subwerkgroepen* hebben als thema's:
- Doel van het wiskundeonderwijs in het HBO
- Praktische wiskundevraagstukken
- Het didactiseren van computeralgebra
- Organiseren van de volgende conferentie (wiskunde in de 21e eeuw)

De werkgroep HBO van de NVvW

Roel van Asselt
Jan Blankespoor
Mieke Collette
Victor Hermans
Jacob Hop
Kees de Jong
Metha Kamminga
Henk van der Kooij
Peter Kop
Alex Lobregt
Joop Mets
Jos Pompen
Henk Staal
Peter van der Velden

Bij "Het doel van het wiskundeonderwijs in het HBO" wordt per opleiding geanalyseerd wat de mogelijke onderwijsfilosofie voor de betreffende opleidingssoort

Jan Blankespoor en Metha Kamminga

(sector) zou kunnen of moeten zijn. Hiermee wordt in het bijzonder bedoeld in hoeverre het wiskundig modelleren, het structureren, het definiëren en formaliseren in het wiskundeonderwijs verankerd moeten zitten. Hoe relevant zijn deze functies van het wiskundeonderwijs voor de student in de betreffende sector?
In deze werkgroep kan ook aandacht besteed worden aan de positie van de wiskundedocent in het HBO. Met name dient hij/zij door de werkgroep geholpen te worden aan argumenten om zijn positie (als vakdocent) te verdedigen. Maar ook helpt de werkgroep hem/haar aan argumenten om zich actief op te kunnen stellen in het kader van project-georiënteerd of probleem-gestuurd onderwijs. In onderzoek is momenteel de mogelijkheid om het TWIN-project uit het mbo (integratie van techniek, wiskunde, natuurkunde en ICT) voort te zetten in het HBO.

Hoewel in het HBO al talloze voorbeelden van toepassingen voor het oprapen liggen, blijkt ook hier een enorme behoefte te bestaan aan nieuwe praktijkvoorbeelden, waarin de wiskunde een belangrijke rol speelt. In de subwerkgroep “Praktische wiskundevraagstukken” worden voor alle sectoren cases en andere practijkvoorbeelden verzameld waarin de toepassing van de wiskunde kan worden gedemonstreerd.

In Nederland zijn voorbeelden van de invoering van computeralgebra (CA) bekend. Daar zijn goede maar ook veel slechte voorbeelden bij. Het gebruikte softwarepakket (dan wel de TI89 of de TI92) zijn niet de oorzaak van het probleem. CA wordt gewoon verkeerd gebruikt. Veel vraagstukken uit het traditionele curriculum worden met CA triviaal. Soms ontaardt een CA-cursus al snel in een knoppencursus. Ook komt het voor dat CA als kanon gebruikt wordt om op muggen te schieten. En een belangrijke vraag is steeds: wat moet de student aan traditionele vaardigheden blijven beheersen en wat mag met CA gedaan worden?
In de subwerkgroep “Didactiseren van computeralgebra” wordt een didactiek ontwikkeld voor efficient en effectief wiskundeonderwijs in het HBO, gebruikmakend van het CA-hulpmiddel. Daaraan voorafgaand wordt gefilosofeerd over de gevolgen van het gebruik van CA in het wiskunde- (en ander?) onderwijs voor het curriculum. Ook wordt gekeken naar de organisatie van de werkvorm en de wijze waarop CA-werk moet worden beoordeeld. Uiteindelijk doet de werkgroep een aantal aanbevelingen voor het wiskunde-curriculum, inclusief de werkvorm, de organisatie en de beoordeling.

Na de succesvolle conferentie in januari 1999 hebben velen de behoefte kenbaar gemaakt in 2000 opnieuw over dezelfde thema’s te confereren. Mede door de initiatieven van het platform voor wiskundedocenten in het HBO is die behoefte vergroot. Van verschillende kanten is ook aangedrongen op internationalisering. Men heeft behoefte te vernemen hoe het met het wiskundeonderwijs gesteld is in het buitenland. Daarom wordt gedacht aan enkele buitenlandse sprekers. Mede door het werk in de overige werkgroepen (zie boven) is er voldoende nieuw materiaal om over te confereren. De taak voor de subwerkgroep ‘Organisatie van een conferentie in 2000’ is hiermee omschreven.

Voor de subwerkgroepen worden nog steeds deelnemers gezocht. Hier kunnen ook lezers van dit stukje bij zijn. Als u enthousiast geworden bent, e-mail of bel dan even met de secretaris van de werkgroep:

Jan Blankespoor

Tel: 070 3401805 (werk)
Tel: 079 3212164
E-mail: bl@thrijswijk.nl

Nomenclatuur en Grafische Rekenmachine

Kees Hoogland

Inleiding

Naast alle andere beslommeringen rond de Tweede Fase is het voor het werken in de klas en voor het toewerken naar een gewenst eindniveau erg belangrijk een beeld te hebben van wat de leerling nu eigenlijk moet opschrijven bij het beantwoorden van de opgaven in het boek. Wanneer mag nu wat? En wat moet er dan worden opgeschreven?
Het zojuist uitgebrachte *Nomenclatuurrapport* van de Vereniging en de *Novemberbrieven* die het ministerie recent naar de scholen heeft gestuurd, geven hiervoor een nadere indicatie.

Nomenclatuur

In het Nomenclatuurrapport voor de Tweede Fase uitgebracht door de Vereniging staat een opsomming van begrippen en werkwoorden die nader worden afgebakend.
Het belangrijkste van het rapport voor de klassenpraktijk zijn maar mijn idee de omschreven werkwoorden met daarbij de handelingen die van de leerlingen worden verwacht.
Het gaat hierbij onder andere om uitdrukkingen als: bereken, los op, teken de grafiek, etcetera. In het rapport staat bijvoorbeeld:

Bereken
Hierbij moet de berekening altijd opgeschreven worden; het antwoord mag ook een met de (grafische) rekenmachine gevonden antwoord zijn. Bij het gebruik van de grafische rekenmachine moet duidelijk worden aangegeven hoe men tot het antwoord komt. Wanneer een antwoord wordt vereist dat langs algebraïsche weg en niet via benaderingen met de (grafische) rekenmachine dient te worden gevonden, wordt dat in de vraagstelling expliciet aangegeven. Dit kan op de volgende manier: “Bereken (eventueel met een toevoeging als ‘langs algebraïsche weg’ of ‘met differentiëren’ of iets dergelijks) de exacte waarde van …”

Heeft u belangstelling voor het volledige Nomenclatuurrapport lees dan verder in ‘Van de bestuurstafel’.

Novemberbrieven

Recent is op de scholen een heel pakket van de CEVO aangekomen over de examens en de toegestane hulpmiddelen. Deze informatie is ook te vinden op: www.eindexamen.nl. Over het toekomstige correctievoorschrift bij de examens staat daarin het volgende:

In het jaar 2000 betekent dat het volgende. Bij wiskunde A en wiskunde B havo, nieuwe stijl, wordt als vakspecifieke regel in het correctievoorschrift opgenomen:
“de algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.”
Soms zal de vraagstelling leiden tot een meer globale beschrijving van het gebruik, soms tot een meer concrete. De kandidaten moeten met deze beschrijving een beoordelaar duidelijk maken wat hun gedachtengang/werkwijze is geweest. De beoordelaar moet deze gedachtengang/werkwijze kunnen verifiëren om deelscores te kunnen toekennen.
Voorbeeld.
In het antwoordmodel staat bij vraag X:
functies f en g in de GR invoeren
f (x) = g (x) met de GR oplossen geeft 3,14
In dat geval is de werkwijze van een leerling op de GR van het merk FANTASY:
“In FUNCTION menu Y1= f(x) ingevoerd en Y2 = g(x)”
“In CALC menu gekozen voor INTERSECT; voor de grafieken Y1 en Y2, de grenzen van het interval op 0 en 100 gezet. Dit gaf precies één snijpunt. De *x* hiervan is op twee decimalen afgerond 3,14.”
(FANTASY heeft overeenkomsten met bestaande machines)
In dit voorbeeld kan een tweede corrector de werkwijze volgen, ook al beschikt hij over een GR van het merk IMAGINATION en niet over de FANTASY. In gevallen waar dat minder duidelijk is en waar de werkwijze op verschillende merken sterk uiteenloopt, kan de eerste corrector desnoods een toelichting geven bij zijn beoordeling.
Na het examen van 2000 wordt deze vorm van beoordeling geëvalueerd en zo nodig bijgesteld.

Docenten zullen vaak eerder denken aan een algebraïsche oplossingswijze dan aan een oplossing via de grafische rekenmachine. Leerlingen kiezen vaak eerder voor een werkwijze met de grafische rekenmachine. Extra aandacht zal dan nodig zijn om ze te trainen hun werkwijze in dat geval helder op papier te zetten.
Op deze zaken zullen we in de komende nummers uitgebreid terugkomen.

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Orgaandonatie?
Het staat er, en het staat er altijd, en het zal er dus wel altijd gestaan hebben.
Het is altijd lastig je voor te stellen dat er een tijd was voordat was wat is. Het maakt niet uit of dat de computer is voor de jongere van nu, of de tijd voor de Big Bang voor de iets ouderen.

Of, in dit geval: Euclides.
Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, een natuurlijk, onvervreemdbaar onderdeel.

Maar Euclides is, blijkt nu, ouder dan de vereniging, een jaar ouder zelfs, en heeft ook 30 jaar als los orgaan bestaan. Pas toen ik op de kleuterschool zat is het als officieel orgaan aan de NVvW verbonden.

Daarom is het nu al feest bij Euclides, en moet de vereniging nog even wachten.

Het is me daarom een groot genoegen om namens het bestuur van de NVvW ons orgaan van harte te feliciteren met het bereiken van deze respectabele leeftijd. We zijn trots op het blad en blij met de redactie die er elke keer weer in slaagt om een aantrekkelijk nummer samen te stellen, met veel actuele informatie en interessante artikelen. Wat ons betreft zijn er geen afstotingsverschijnselen, integendeel, en de uiterlijke verschijnselen van naderende ouderdom gaan we gewoon samen te lijf met een facelift.

Proficiat Euclides!

Nomenclatuur wiskunde Tweede Fase havo en vwo
Het is van groot belang dat er bij leerlingen en leraren duidelijkheid is over de te gebruiken terminologie bij de examens. De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren heeft in de afgelopen jaren een traditie opgebouwd van nomenclatuurrapporten bij de vernieuwing van examenprogramma's.

De veranderingen in de programma's in de Tweede Fase zijn ten dele vakinhoudelijk, waardoor nieuwe begrippen ingevoerd moeten worden. Door de invoering van de Grafische Rekenmachine treedt er daarnaast een verschuiving op in de betekenis van vaak al langer gebruikte woorden. De ooit vaststaande betekenis van woorden als 'Los op' en 'Bereken' is dan in dat licht plots niet zo duidelijk meer.

De Nomenclatuurcommissie, ingesteld door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, heeft een advies gegeven over de nomenclatuur behorende bij de nieuwe examenprogramma's voor havo en vwo in de Tweede Fase. Dit advies is in diverse commentaarronden aangepast en bijgesteld. Het eindresultaat is ter adoptie aangeboden aan de CEVO, de Centrale Examencommissie Vaststelling Opgaven, en aan allen die op enigerlei wijze betrokken zijn bij de vaststelling van de examens.

Het eindrapport is tijdens de jaarvergadering uitgedeeld aan belangstellende leden.
Leden van de NVvW kunnen op verzoek kosteloos in het bezit komen van dit nuttige rapport. Op eigentijdse wijze door het rapport te 'downloaden' van onze website, of ouderwets degelijk: als u een briefkaartje stuurt naar de ledenadministratie (adres voorin dit blad) krijgt u het rapport franco thuisgestuurd.

Graag maak ik nog van de gelegenheid gebruik om namens het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren onze grote dank en waardering uit te spreken voor het omvangrijke werk dat door de leden van de commissie is verricht om tot dit resultaat te komen. Ook aan de velen die zeer terzake commentaar leverden zijn we dank verschuldigd. We hopen dat dit rapport een heldere en bruikbare gids zal zijn door het taallandschap van de schoolwiskunde.

Marian Kollenveld

NVvW Jaarrede 1999

Dames en Heren,

U kunt gerust zijn, we hebben het nagegaan, alles is onder controle. De stelling van Pythagoras, de cosinusregel, de stelling van Thales, al die pijlers onder ons onderwijs zijn geheel millennium-proof. De wiskunde en het wiskundeonderwijs halen de volgende eeuw wel. Maar wel geheel anders dan hoe zij deze eeuw zijn ingegaan.

Populair

In de afgelopen jaren heeft de wiskunde haar ivoren toren verlaten. Althans in het voortgezet onderwijs is de wiskunde in toenemende mate een vak van algemene ontwikkeling geworden, nuttig en nodig voor iedereen. Immens populair, vooral bij beleidsmakers, die vinden dat geen leerling aan enige vorm van wiskundeonderwijs mag ontsnappen. Je vindt dat bijvoorbeeld terug in de tweede fase, waar wiskunde het grootste vak is geworden, en in elk profiel aanwezig is.

Breed of diep

Die verbreding kent een prijs. U weet allemaal dat als de breedte toeneemt, maar het volume niet, dat dan onvermijdelijk de hoogte, of in dit geval de diepgang minder wordt.
Wij zien op zich grote waarde in die verbreding, die een poging is om de wiskunde toegankelijk te maken en toepasbaar op veel meer terreinen dan de van oudsher 'academische, zuivere wiskunde'. Wij vinden het belangrijk dat de leerlingen op hun eigen niveau worden aangesproken en uitgedaagd om actief met wiskunde bezig te zijn.
Dat impliceert dat er in het onderwijs zeker ook aandacht moet zijn voor de wiskundig meer getalenteerden. In dit kader heeft de Stichting Leerplan Ontwikkeling, de SLO, op verzoek van het bestuur, een eerste conferentie georganiseerd met deskundigen om te zien welke ideeën er zijn en welke wiskunde activiteiten voor deze leerlingen geschikt zijn.
Aan de andere kant van het spectrum constateren wij, uit ervaring in de klas, die wordt bevestigd in het rapport van de inspectie over de basisvorming, dat het programma voor de minst begaafden vaak ook niet goed is toegesneden op deze groep leerlingen. Voor hen is een nieuw, ander programma wenselijk.

Basisvorming

Het wiskundeonderwijs voor allen in de basisvorming kreeg van de inspectie een zesminnetje. In de slotlezing zal de heer Kleijne daar uitgebreid op ingaan. Ik houd het bij de constatering dat daar dus nog enige ruimte is voor verbetering.

Havo/vwo

Na een beperkte start van enige voorlopers vorig jaar is nu op elke havo/vwo-school de tweede fase ingevoerd. Naar aanleiding van de ervaringen het eerste jaar, die unaniem wezen op een overladenheid van het vwo-programma, zijn er in de loop van het jaar een aantal reducties aangebracht. In eerste instantie zonder ons, maar na enige aandrang onzerzijds steeds in overleg met ons.
Onze werkgroep havo/vwo heeft het verzoek gekregen de ontwikkelingen nauwlettend te blijven volgen, teneinde het bestuur tijdig te adviseren over eventuele wenselijke acties onzerzijds.

Formulekaart

In het nieuwe programma is het gebruik van een formulekaart toegestaan. We streven ernaar nog voor de examens van dit cursusjaar een handzaam formuleboekje uit te brengen dat bij elk wiskunde-examen in de tweede fase gebruikt mag worden, in alle profielen, bij havo en vwo.

Nomenclatuur

Het is van groot belang voor leerlingen en leraren dat de terminologie in de examens duidelijk is. De vereniging heeft al een lange traditie van nomenclatuurrapporten. Ook bij deze tweede-fase-programma's is een dergelijk rapport verschenen. Het wordt aangeboden aan de examenmakers, met het verzoek dit te adopteren. U kunt zelf een exemplaar adopteren bij de ledenadministratie van de vereniging. Gratis voor leden, uiteraard.

Vbo/mavo

De werkgroep vbo/mavo zal zich de komende tijd bezighouden met een aantal zaken die direct in verband staan met de invoering van de leerwegen. Het bestuur heeft aan de SLO gevraagd de verandering met betrekking tot het schoolexamen in kaart te brengen en de docent een zo concreet mogelijk beeld te geven van het examendossier. De werkgroep zal het antwoord van de SLO bestuderen en bevorderen dat het product ten dienste komt van de docenten. Nadrukkelijk zal de haalbaarheid worden nagegaan.

Belang nascholing

Het bestuur acht het van belang dat veranderende didactiek en vakinhouden, passend bij nieuwe programma's, door ondersteunende instituten worden ontwikkeld en uitgedragen. Docenten dienen, in werktijd, in de gelegenheid te worden gesteld zich zo nodig een nieuwe manier van werken eigen te maken. Bij de invoering van de basisvorming is dat ons inziens te weinig gebeurd. Het bestuur zal vanuit een eigen visie stimulerende activiteiten ontwikkelen voor verdergaande professionalisering van de docent. Hierbij zoeken wij samenwerking met andere vakinhoudelijke verenigingen binnen het platform VVVO, en de instellingen rond het wiskundeonderwijs.

Mbo/hbo

Is -of lijkt- de positie van ons vak in het voortgezet onderwijs niet bedreigd, anders ligt dat in het vervolg, in mbo en hbo. De positie van wiskunde als zelfstandig vak is daar heel onzeker als gevolg van onderwijsvernieuwingen zoals projectonderwijs en probleemgestuurd onderwijs.

Al enige jaren is de werkgroep mbo actief. Binnen het mbo is men bezig met een vernieuwingsproject wiskunde, genaamd TWIN, gericht op modernisering en kwaliteitsverbetering om zo de positie van het vak en de vakdocent te verstevigen.

Totnogtoe heeft de werkgroep mbo zich vooral gericht op de sector techniek, het komend jaar wil zij haar blik verruimen naar de sectoren economie en educatie, wat betreft rekenen en wiskunde. De werkgroep is derhalve naarstig op zoek naar belangstellenden uit beide sectoren. U kunt zich melden bij de vereniging.

Sinds kort is de vereniging verblijd met een werkgroep hbo. Binnen het hbo bestond nog geen organisatie van wiskundedocenten, maar ook daar wordt de positie van wiskunde als zelfstandig vak bedreigd. De werkgroep wil niet lijdzaam afwachten tot het vak ten onder gaat, maar het belang van de wiskunde als zelfstandig vak binnen de opleidingen versterken en daarmee de positie van de docent veilig stellen. Instrumenten daarvoor zijn bijvoorbeeld een betere vertaling van de eindtermen van de opleiding naar het vak wiskunde, en -zeker bij techniek- een verantwoord gebruik van computeralgebra in de wiskunde met uitstraling naar andere vakken. Komend jaar zal de werkgroep weer een conferentie voor hbo-docenten organiseren.

Als gevolg van deze uitbreiding van onze doelgroep stellen we voor het bestuur aan te vullen met een vertegenwoordiger van het hbo: mevrouw Metha Kamminga.

De toekomst

Het lage aantal studenten wiskunde is ook voor het bestuur een bron van zorg. Zonder een bepaalde kritische massa aan goed opgeleide wiskundigen en wiskundedocenten is ons mooie vak op termijn ten dode opgeschreven. De oorzaken zijn velerlei, en veel onttrekt zich aan onze beïnvloeding. Wat we doen is het volgende:

Imagoverbetering

De vereniging probeert met de uitgave van de reeks ZEBRA-boekjes zowel de vwo-leerling als een breder publiek van geïnteresseerde leken een realistischer, en dus aantrekkelijker, beeld van wiskunde en haar toepassingsmogelijkheden te geven.

Initiatieven van universiteiten en anderen, zoals masterclasses of het net uitgebroede plan om eerstegraads leraren in de gelegenheid te stellen een deel van hun werktijd aan een universiteit door te brengen, hebben onze hartelijke steun.

Werkdruk

De werkdruk en overbelasting van docenten, mede-oorzaak van de geringe aantrekkelijkheid van het beroep, zijn onderwerpen van gesprek in het overleg van alle vakinhoudelijke verenigingen met ministerie en schoolleiders.

De klas

En wij, als docent in de klas, kunnen slechts naar ons beste vermogen ons onderwijs zo aantrekkelijk en interessant mogelijk vormgeven. Een ruim aanbod aan beschikbare computers en goed bruikbare software kan daaraan zeker een positieve bijdrage leveren. Deze situatie is nog niet op alle scholen bereikt, al is er wel enige vooruitgang te bespeuren.

Moet dat wel allemaal zo?

Die bemoeienis van de vereniging met zaken als examenprogramma's en reducties, de belasting van de docent, het lerarentekort, het beeld van 'exact', dat alles roept ook vragen op van fundamentele aard. Worden wij niet kwetsbaar, raken wij niet gecompromitteerd door mee te doen, raken wij onze onafhankelijkheid niet kwijt?

Missie

Het bestuur is zich ervan bewust dat hierin een zeker gevaar schuilt. Maar wij geloven niet in 'splendid isolation', het in stilte belijden van het eigen gelijk. Het bestuur vindt het belangrijk om de stem van de vereniging en daarmee die van de leraar voor de klas te laten klinken overal waar dat nuttig is voor het behartigen van de belangen van de leden en het bevorderen van de kwaliteit van het Nederlandse wiskundeonderwijs. Dat betekent enerzijds tijdig reageren op ontwikkelingen maar anderzijds ook anticiperend eigen initiatieven nemen. De eigen stem, het eigen standpunt staat daarbij steeds voorop.

De werkelijkheid is evenwel dat de vereniging in het algemeen slechts een adviserende rol heeft. Dan is de kwaliteit van de argumentatie van belang. De vereniging moet niet alleen pretenderen de docent te vertegenwoordigen maar dat ook in werkelijkheid doen.

Communicatie

Dat betekent een voortdurende communicatie met de leden. De afgelopen jaren hebben Euclides en onze website zich verder ontwikkeld als bron van actuele informatie. Die lijn willen we doorzetten. Daarnaast willen we de mogelijkheden van ons blad, de website en de bijeenkomsten meer gebruiken voor tweerichtingsverkeer. De redactie van Euclides stelt uw bijdragen uit de klas op hoge prijs en is gaarne bereid om van een kladje uwerzijds een mooi artikel te maken, de website heeft ook vele mogelijkheden om als discussieplatform te dienen.

Conclusie
En zo is er reden tot zorg en tevredenheid, is er nog voldoende om ons druk over te maken, maar de conclusie is als vanouds dat het wiskundeonderwijs nog springlevend is, als ik naar u kijk de vereniging ook, dus is er alle reden voor het vieren van ons jubileum volgend jaar.

Lustrum
De UNESCO is zo vriendelijk geweest het jaar 2000 uit te roepen tot 'jaar van de wiskunde'. En als het aan ons -en de lustrumcommissie-ligt, en dat ligt het, zult u daar veel van merken. In Euclides heeft u al een aantal voorproefjes kunnen lezen van het uiterst fraaie jubileumboek, met daarin de geschiedschrijving van de 75-jarige vereniging en van het wiskundeonderwijs van de laatste eeuw, een boek met historische waarde. Nooit eerder in ons taalgebied is iets dergelijks verschenen. Een boek voor elk lid, naar ons idee, en we zullen het dan ook tegen een vriendenprijsje aan de leden ter beschikking stellen. Daarnaast zal er ter gelegenheid van het lustrum bij alle leden een wiskundig verantwoord boompje geplant worden. (Deze zin begrijpt u pas volgend jaar.) Dan is er een meerdaags congres waarin we over de grenzen van de wiskunde willen kijken, zowel geografisch als vakinhoudelijk. En ten slotte is er een min of meer nationale manifestatie gepland waarbij alle leerlingen en hun reken/wiskundedocenten in Nederland betrokken zullen worden. U ziet, we pakken het groot aan. Voor dit laatste project hebben we financiële steun van de stichting Weten ontvangen, dat ging onze eigen middelen te boven.

Ten slotte
Maar laten we niet te zeer vooruitlopen op de dingen die komen gaan, ook vandaag is er weer veel te genieten. Dankzij de grote inzet van velen is er weer een programma dat praktisch klinkt als een klok en loopt als een motor in dit geval. We zijn als bestuur heel trots en dankbaar voor de bereidheid van zoveel leden om zich belangeloos voor de vereniging in te zetten. En dat niet alleen bij de jaarvergadering. Dat toont een betrokkenheid die hartverwarmend is, en ons ook zeer stimuleert. Ik wens u dan ook een leerzame en genoeglijke dag toe.
Dank u wel.

Noot

Deze rede werd door voorzitter Marian Kollenveld uitgesproken op de jaarvergadering/studiedag van de NVvW op 13 november 1999.

bespreking

H. Begehr e.a.
Mathematics in Berlin
Birkhäuser Verlag 1998
ISBN 3-7643-5943-9
200 blz.

Het International Congress of Mathematicians vindt eens in de vier jaar plaats. In 1998 was het in Berlijn. Voor die gelegenheid werd dit boekje samengesteld. In 24 artikelen wordt door verschillende schrijvers een beeld gegeven van de ontwikkeling van de wiskunde in Berlijn. Het begint in de achttiende eeuw met Leibniz, Euler en Lagrange. In de negentiende eeuw zijn het onder andere Dirichlet, Kummer, Weierstrass en Kronecker die beeldbepalend zijn. In onze eeuw waren er ook nog verschillende belangrijke wiskundigen aan de diverse instellingen in Berlijn, onder andere Caratheodory, von Mises, Schmidt en Hasse. Tijden van bloei en verval. De nazi-tijd wordt niet vergeten, toen mannen met kleine snorretjes (Bieberbach) mannen met grote snorren (Einstein, Landau) of zonder snor (von Mises) verjoegen.
Er zijn ruim 40 portretten van wiskundigen, op één na allemaal mannen. De stukjes zijn vrij beknopt, maar er worden uitvoerige literatuurverwijzingen gegeven. Het boek is interessant voor liefhebbers van de geschiedenis van de wiskunde waarbij we voor de lezers van Euclides erbij zeggen dat het bijna alleen gaat over de wiskunde als wetenschap. Wat het wiskundeonderwijs betreft komen we te weten dat Kummer en Weierstrass les gaven aan een gymnasium voordat ze beroemde professoren in Berlijn werden en dat in de nazi-tijd sommige wiskundigen sommetjes bedachten voor de scholen waardoor de kinderen tot de conclusie moesten komen dat het Duitse volk meer ruimte nodig had.

J.C. Smit

Honderd jaar wiskunde-onderwijs (4)

De didactische pioniers van de Wiskunde Werkgroep

De didactiek van de wiskunde heeft zich in hoofdzaak de afgelopen honderd jaar ontwikkeld. Het begin ligt misschien wel in 1874 toen *Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak* van Jan Versluys verscheen. Dit boek en de schoolboeken van Versluys hebben tot ver in de twintigste eeuw het wiskundeonderwijs bepaald.
Uit de titel van Versluys' didactiekboek blijkt de nadruk op de wetenschappelijke behandeling. Vanaf eind negentiende eeuw waren er echter ook initiatieven om in het onderwijs, en ook in het wiskundeonderwijs, meer uit te gaan van het lerende kind. Een van deze initiatieven was de oprichting van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs in 1936 door Kees Boeke. In datzelfde jaar werd als afdeling hiervan de Wiskunde Werkgroep opgericht.
De Wiskunde Werkgroep onderscheidde zich meteen al van de twee bestaande verenigingen voor wiskundeleraren, Liwenagel (voor wiskundeleraren aan gymnasia en lycea) en Wimecos (voor wiskundeleraren aan hbs'en), de twee voorgangers van onze NVvW: er werd geen 'standsverschil' gemaakt, want leraren van mulo, hbs en gymnasium konden er lid van worden. Vrijwel alle didactische pioniers uit de ongeveer veertig jaar dat de Wiskunde Werkgroep heeft bestaan zijn er lid van geweest: mevrouw T. Ehrenfest-Afanassjewa, E.J. Dijksterhuis, P.M. van Hiele, D. van Hiele-Geldof, G. Krooshof, J.H. Wansink en H. Freudenthal, om de bekendste te noemen.
Wansink heeft in de jaren '50 als voorzitter van Wimecos er veel aan bijgedragen dat de drie clubs gingen samenwerken. Twee belangrijke wapenfeiten zijn het gezamenlijk steunen van de leerplanwijziging van 1958 waarbij hbs en gymnasium hetzelfde programma kregen, en de afspraak dat vanaf 1962 Euclides ook het orgaan van de Wiskunde Werkgroep werd. Wansink is overigens degene die het eerste grote werk over wiskundedidactiek schreef: Didactische Oriëntatie voor Wiskundeleraren.
In de Wiskunde Werkgroep werden thema's uit het wiskundeonderwijs besproken. Naast discussies over de inhoud van het leerplan ging het vooral over de vraag hoe het onderwijs van een bepaald onderwerp vorm moest krijgen. Dit betrof met name het aanvankelijk meetkundeonderwijs. Tot 1968 was de schoolmeetkunde een kopie van de euclidische meetkunde: uitgaande van een paar axioma's werd deductief een logisch bouwwerk voor de meetkunde opgetrokken. Hoe daarbij met de aanschouwelijkheid moest worden omgegaan was een belangrijk didactisch probleem.
Een ander punt waaraan de Wiskunde Werkgroep veel aandacht gaf was de vormende waarde van de wiskunde: "Zullen de leerlingen door goed wiskundeonderwijs leren denken?"
In 1961 werd de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) geïnstalleerd die de leerplanwijziging van 1968 ging voorbereiden. Een aantal leden van de Wiskunde Werkroep werkte mee aan schoolboeken voor het nieuwe leerplan bijvoorbeeld Krooshof aan Moderne Wiskunde en Van Hiele aan Van A tot Z. De voorstellen van de CMLW waren beïnvloed door de New Math beweging: ze hadden een behoorlijk structuralistisch karakter. En klaarblijkelijk voelden ook leden van de Wiskunde Werkgroep hiervoor. Freudenthal geldt als degene die het Nederlandse wiskundeonderwijs voor de uitwassen van de New Math heeft behoed. Hoewel hij in die tijd voorzitter van de Wiskunde Werkgroep was, hield hij zich stil.
Rond 1970 werd duidelijk dat de CMLW een eigen instituut, het IOWO, nu het Freudenthal instituut, zou krijgen. Via Freudenthal kregen ideeën die binnen de Wiskunde Werkgroep leefden, daar ook aandacht. En vervolgens hebben ze wellicht vooral in het realistische meetkundeonderwijs van de basisvorming een plaatsje gekregen. Maar inmiddels was de Wiskunde Werkgroep in 1974 opgeheven.
Ed de Moor heeft het voorafgaande en nog veel meer uitgezocht en opgeschreven voor het Jubileumboek dat in oktober 2000 verschijnt.

De redactiecommissie van het Jubileumboek

Euclides is terug

Van exploreren naar bewijzen in 5 en 6 vwo Wat is de transfer?

Anne van Streun

Inleiding

De wereldwijde New Math beweging uit de zestiger jaren kreeg de wind in de zeilen door de schokgolf, die de eerste Spoetnik (1958) in de westerse wereld veroorzaakte. Wiskundigen zagen hun kans schoon om het wiskundeonderwijs drastisch te vernieuwen. Weg met Euclides! Ruim baan voor de eenvoudige basisstructuren van de wiskunde, voor de theorie van de verzamelingen en relaties. Bij onze zuiderburen bepaalde de wiskundige en senator Papy lange tijd de inhoud van het vernieuwde programma. Zijn leerboeken voor het voortgezet onderwijs waren in full colour (!) uitgevoerde hoogstandjes in het uitleggen van hogere wiskunde op leerlingenniveau. Zo werd in leerjaar 1 het reële getal keurig ingevoerd met een variant op de snede van Dedekind door oneindig voortlopende binaire getallen te gebruiken. De stelling van Pythagoras verscheen terloops als een speciaal geval van een stelling over vectoren.

2 — HOOFDSTELLING VAN PYTHAGORAS

HOOFDSTELLING $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \Pi_o$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\vec{x}\vec{y} + \|\vec{y}\|^2$$

Als

$$\vec{x} \neq \vec{o} \neq \vec{y}$$

dan

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| \cos(\vec{x},\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

PYTHAGORAS

Figuur 1 De stelling van Pythagoras uit Papy Moderne Wiskunde 3

In Nederland werd met de invoering van de Mammoetwet in 1968 een slap compromis over het leerplan wiskunde gesloten. De Euclidische opbouw van de meetkunde werd verruild voor een meer inductieve benadering, maar voor de beoogde deductieve tweede ronde in havo-vwo met de transformatiemeetkunde ontbrak de ruimte. Wel werd de taal van de verzamelingen en relaties zo rigoureus ingevoerd dat al snel de gebruikers van wiskunde, zoals onze natuurkundecollega's, begonnen te betogen dat op die manier de wiskunde zeker niet zou functioneren in hun vakken.

Wat is een cirkel?
$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4\}$
$\{P(x, y) \in X \times Y \mid d(P, O) = 2\}$.

Achteraf hebben sommige leden van de toenmalige programmacommissies zich beklaagd over de uitwerking van dat nieuwe programma in de schoolboeken. Hans Freudenthal heeft de formele invulling met name toegeschreven aan de invloed van Piet Vredenduin, die als gymnasiumleraar een grote bewondering voor Papy en de logica had opgevat. Met enorme inzet beïnvloedde hij de feitelijke inhoud vanaf het schrijven van de toelichtingen op de examenprogramma's tot en met het adviseren van het Cito bij het maken van de multiple choice examens voor de mavo. Tegelijk met de invoering van de basisvorming zijn ook in de mavo de laatste restanten van de New Math vernieuwing verdwenen, ruim 25 jaar na dato.

Eigenlijk is het heel verbazingwekkend dat de liefde voor de Euclidische meetkunde na zoveel jaren waarin dat vak niet meer werd onderwezen, nog steeds leeft onder de oudere Nederlanders en wiskundeleraren. Zo grijpt de wetenschapsredacteur Dirk van Delft in NRC HANDELSBLAD van 2 januari 1999 zijn bespreking van het boek van J.L. Heilbron *Geometry Civilized: History, Culture and Technique* aan om met Heilbron te pleiten voor een terugkeer van de Euclidische meetkunde. Het paginagrote artikel heet dan ook ‘Terug naar Euclides’. Hij laat met klassieke voorbeelden zien hoe de Griekse meetkunde nog steeds genoegen kan verschaffen en de geest kan scherpen. Hij merkt op dat Euclides inmiddels (!) van de middelbare school is verdwenen en dat daar de ‘realistische wiskunde’ hoogtij viert. Hij was kennelijk niet op de hoogte van het goede nieuws: Euclides is terug! Een omvangrijk deel van het programma wiskunde B2 vwo wordt gevormd door het onderwerp Voortgezette meetkunde, met als voornaamste leerdoel het leren redeneren en bewijzen in meetkundige situaties.

Voortgezette meetkunde in wiskunde B2 vwo

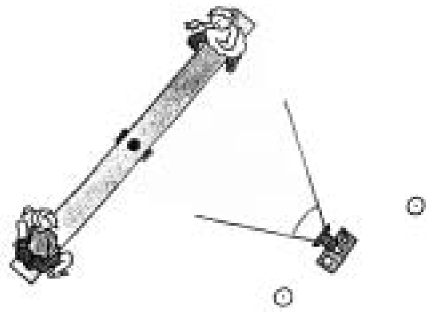
Leerlingen in de Tweede Fase havo-vwo moeten kiezen uit vier clusters van vakken, profielen genoemd. In het profiel Natuur en Techniek is het vak wiskunde B1,2 verplicht. De B1,2 betekent in het vwo dat het vak wiskunde B1 uit het profiel Natuur en Gezondheid wordt uitgebreid met 200 studielasturen, dat is het aantal uren actieve werktijd. De Voortgezette meetkunde (120 slu) vormt het hoofdbestanddeel van die uitbreiding.
Het voornaamste doel van de Voortgezette meetkunde in het vwo is het leren redeneren en bewijzen met behulp van de meetkunde. De oude discussie over de vormende waarde van het wiskundeonderwijs is nu weer actueel. Zoals elders in dit nummer van Euclides wordt verhaald betoogde in 1924 mevrouw Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa al dat meetkundeonderwijs kan bijdragen tot de ontwikkeling van het denkvermogen, mits de aandacht niet ligt bij de meetkundige stellingen zelf maar bij de denkgewoonten en het proces van wiskundig denken. In het nieuwe examenprogramma is dezelfde keuze gemaakt. De leerlingen krijgen op het centraal examen de beschikking over een lijst met meetkundige stellingen die zij in bewijzen mogen gebruiken. Uniek in de geschiedenis van het wiskundeonderwijs is de opname in het examenprogramma van concrete eindtermen die op redeneren en bewijzen betrekking hebben.

Enkele eindtermen van het examenprogramma wiskunde B2 vwo.
De kandidaat kan
128 *het verschil aangeven tussen een definitie en een stelling*
129 *het verschil aangeven tussen een vermoeden en een stelling*
130 *in relevante gevallen het verschil aangeven tussen een stelling en haar omkering herkennen en beoordelen welke van de twee bij een bepaald bewijs een rol kan spelen*
131 *de structuur van een gegeven bewijs doorgronden*
132 *verschillende technieken hanteren bij het geven van een bewijs of het weerleggen van een vermoeden, zoals:*
- *het redeneren vanuit het ongerijmde*
- *het gebruik maken van meetkundige plaatsen*
- *het onderzoeken en onderscheiden van verschillende gevallen*
- *het geven van een tegenvoorbeeld.*

Een intuïtieve grondslag à la Ehrenfest

Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa pleitte vanaf 1924 voor het leggen van een intuïtieve basis omstreeks het eerste jaar van de middelbare school voordat de deductieve aanpak werd onderwezen. Op die manier konden leerlingen een aantal meetkundige stellingen inductief voor waar accepteren, zonder dat ze meteen geblokkeerd werden door de formele eisen van een bewijs. Mijn eerste kennismaking met de meetkunde in de eerste klas van de CHBS in Leeuwarden (1954) bestond ondanks het pleidooi van Afanassjewa nog steeds uit de vijf postulaten van Euclides. In 1964 begon ik les te geven uit een meetkundeboek met een zogenaamde intuïtieve inleiding van drie maanden, waarna alle stellingen die we intussen hadden ‘ontdekt’ als basis voor het deductieve vervolg werden aangenomen.
De leerlingen die in 5 en 6 vwo de Voortgezette meetkunde gaan bestuderen hebben in de eerste vier leerjaren van het vwo op een breed vlak kennisgemaakt met eigenschappen van meetkundige figuren en met meetkundige relaties zoals de stelling van Pythagoras en de eigenschappen van gelijkvormigheid. In de basisvorming is de meetkunde intuïtief en inductief opgebouwd, zodat alle leerlingen van vbo tot en met vwo het kunnen volgen. Zoals bekend is de kijkmeetkunde in de basisvorming een voorbeeld van een intuïtieve kennis-

making met meetkundige eigenschappen. De intuïtieve inleiding van mevrouw Ehrenfest en de intuïtieve cursus van drie maanden in 1964 is nu een intuïtieve inleiding in de meetkunde van vier leerjaren geworden.



Figuur 2 Intuïtieve basis in de basisvorming

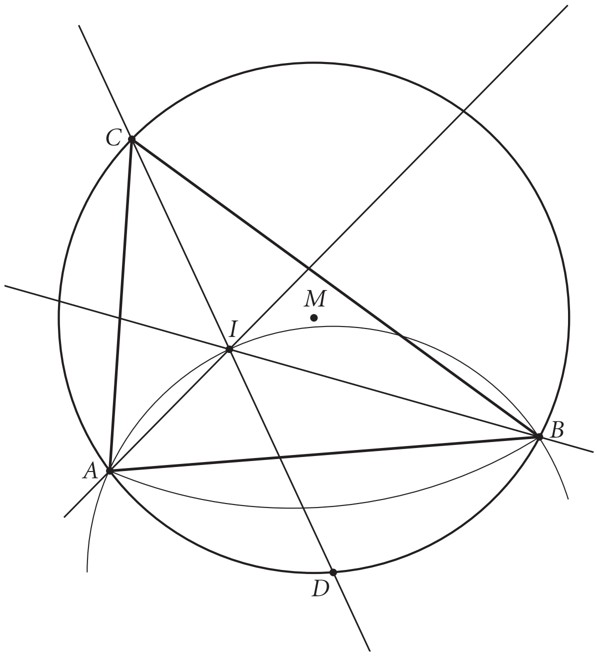
Waar kan de fotograaf staan als beide kinderen op de foto komen?

Exploreren en vermoedens formuleren

Mevrouw Ehrenfest ging het niet om de meetkunde zelf, maar om het wiskundig en logisch denken, dat aan de hand van meetkundige problemen kan worden ontwikkeld. In dat denken, zegt zij, is het stellen van vragen inbegrepen, het zoeken van relaties en combinaties, het formuleren van vermoedens, het controleren en zoeken naar een sluitende redenering. Op die manier komt men tot een beter begrijpen van de zojuist gevonden relatie; men ziet hoe ze past in het totale beeld, dat men bezig is op te bouwen. Tenslotte blijft het formuleren van het al gevonden bewijs over. Zij constateert dat het gangbare meetkundeonderwijs in haar tijd heel weinig doet aan het ontwikkelen van deze wiskundige denkactiviteit, maar vooral gericht is op het (onbegrepen) reproduceren van stellingen en bewijzen.
De terugkeer van Euclides in de bovenbouw van het vwo krijgt een nieuwe dimensie door het verplichte gebruik van meetkundige software, zoals het programma Cabri, dat aan de universiteit van Grenoble is ontwikkeld om het (streng formele) Franse meetkundeonderwijs te verrijken.

Eindterm 133:
De kandidaat kan meetkundige situaties exploreren, met name aan de hand van constructies met een geschikt computerprogramma, en een vermoeden in de vorm van een (te bewijzen) stelling formuleren.

Het proces van zelf zoeken naar relaties, kenmerken, eigenschappen en stellingen wordt sterk bevorderd door deze software, die het mogelijk maakt om kenmerken van figuren vast te leggen en andere te variëren. Nadat leerlingen de probleemsituatie voldoende hebben geëxploreerd, formuleren zij een vermoedelijke wetmatigheid, die daarna nog moet worden bewezen.



Figuur 3 Exploreren met software

In figuur 3 is driehoek *ABC* gegeven en zijn omgeschreven cirkel met middelpunt *M*. De drie bissectrices snijden elkaar in het punt *I*, het middelpunt van de ingeschreven cirkel. Punt *C* doorloopt de omgeschreven cirkel. Wat doet punt *I*?

Met Cabri en andere software kun je punt *C* laten lopen en de baan vinden waarlangs punt *I* loopt. Het lijkt erop dat punt *I* de bovenste cirkelboog *AIB* doorloopt als punt *C* het bovenste deel *ACB* van de omgeschreven cirkel doorloopt. Vermoedelijk is *D* het middelpunt van de cirkel door *A*, *I* en *B*. Valt dit vermoeden te bewijzen?

Bewijzen als denkmethode

Nadat in de zestiger jaren in een groot deel van de Westelijke wereld in de golf van New Math de Euclidische meetkunde was geschrapt of sterk verwaterd, begonnen eminente wiskundigen als Thom en Kline te pleiten voor de terugkeer van de vlakke meetkunde (Otte 1974). Niet om de meetkundige inhoud, die ook in de universitaire wiskunde geen rol van betekenis meer speelde, maar omdat het zo'n prachtig gebied was om goede denkgewoonten aan te leren. Daarbij dachten zij aan het ontwikkelen van een goede probleemaanpak en aan het logisch leren redeneren in een deductief systeem. Ook de wiskundige Polya, bekend van zijn heuristieken in *How to solve it* (1946), benadrukte het belang van het leren zoeken van een bewijs. Veel van zijn voorbeelden waren meetkundig van aard. Hij stelde:

'Als de leerling op school niet de gelegenheid had om vertrouwd te raken met de wisseling van gevoelens bij de worsteling naar een oplossing, dan hebben zijn wiskundelessen op het meest vitale punt gefaald.'
'Als een leerling nooit met meetkundebewijzen kennis maakte, miste hij de beste en eenvoudigste voorbeelden van een echt bewijs en de beste gelegenheid om zich het begrip streng redeneren eigen te maken. Zonder dit begrip ontbreekt het hem aan een echte standaard waarmee hij allerlei soorten zogenaamd bewijs kan vergelijken die men in het moderne leven aan hem kwijt wil.'

Inmiddels zijn we tientallen jaren van onderwijspsychologisch onderzoek verder. Het onderwijzen en doen ontwikkelen van denkmethoden op een bepaald gebied leidt, zo weten we, niet automatisch tot toepassing van diezelfde denkgewoonten op een ander gebied. De transfer is niet verzekerd en soms ver te zoeken. Zoals mevrouw Ehrenfest al veronderstelde, hangt veel af van de manier waarop dat onderwijs is opgezet. Krijgt de leerling de ruimte om zelf te exploreren en bewijzen te zoeken? Krijgt de leerling voldoende structuur en worden algemene aanpakmethoden en heuristieken wel geëxpliciteerd?

Probleemaanpak

In hun afstudeerscriptie aan de Rijksuniversiteit Groningen (werkgroep wiskundedidactiek) leggen Jacolien van Dijk en Iris Gullikers een verband tussen oude didactische analyses van het meetkundeonderwijs en hun observaties in 5 en 6 vwo, waar uit het experimentele lesmateriaal van de Voortgezette meetkunde onderwijs werd gegeven. Net als in de vijftiger jaren lopen leerlingen vast op de aanpak van een bewijs, komen ze niet op het idee van een goede hulplijn, zien ze geen kans om hun kennis systematisch toe te passen, verwarren ze een stelling met diens omgekeerde, worstelen ze met noodzakelijke en voldoende voorwaarden, enzovoort. Kennelijk zijn de leerlingen aan het begin van 5 vwo in dit opzicht niet veel verder gevorderd dan de leerlingen uit de onderbouw van hbs en gymnasium voor 1968.
Dr. Wim Bos schreef in de jaren vijftig dat leerlingen moeten leren een probleem te bevragen, moeten leren de gegeven situatie te vergelijken met de gevraagde, moeten leren hun gereedschapskist aan beschikbare stellingen te herordenen op toepassingen, enzovoort. In de beroemde schoolboekenserie Werkboek der meetkunde 1, 2 en 3 van Bos en Lepoeter zijn indertijd zijn ideeën uitgewerkt. Het belangrijkste kenmerk van de didactiek in die werkboeken is de expliciete aandacht voor de probleemaanpak, voor het idee van bewijzen, voor het analyseren van de gegevens en het te bewijzen, voor de logische regels van een redenering, voor het operationaliseren van de kennis met het oog op typen bewijzen, kortom voor de algemene denkmethoden die in de meetkunde kunnen worden geleerd. Zoals de bekende Russisch-Amerikaanse psycholoog Landa in de zestiger jaren concludeerde op basis van een onderwijsexperiment, zijn dat juist de elementen die leerlingen helpen greep te krijgen op de meetkundige problemen.

De didactiek van de Voortgezette meetkunde

Het doel van de Voortgezette meetkunde in wiskunde B2 vwo is duidelijk genoeg. De universitaire vervolgstudies zijn niet geïnteresseerd in de meetkundige stellingen, maar in het wiskundig en logisch denken dat met behulp van de meetkunde kan worden ontwikkeld. Het exploreren en bewijzen staat daarbij centraal. De oude didactische literatuur en meer recent onderwijspsychologisch onderzoek geven sterke aanwijzingen voor het vermoeden dat transfer van de geleerde denkmethoden naar andere disciplines buiten de meetkunde alleen optreedt als die denkmethoden expliciet aandacht krijgen. Uit de leerboeken moet het de leerlingen (en de leraren) duidelijk worden om welke denkstrategieën het hier gaat. De interactie tussen leerlingen en docent, hier onmisbaar ondanks het studiehuis, zal vooral over de reflectie op de eigen probleemaanpak en de heuristische denkmethoden moeten gaan. Daarbij gaat het bijvoorbeeld om:

1. **Probleemanalyse.**
   Vragen stellen aan de probleemsituatie. Wat weet je? Wat volgt daaruit? Waar moet je naar toe? Heb je kennis beschikbaar om die kloof te overbruggen?
2. **Progressief denken of vooruit denken.**
   Dit zijn de gegevens. Waar doet je dat aan denken? Wat volgt hieruit? Welke stellingen kun je benutten? Kun je een hulplijn trekken om de gegevens beter te benutten?
3. **Regressief denken of terug denken.**
   Daar moet je naar toe. Als dat waar is wat volgt daaruit? Met welk wiskundig gereedschap kun je die conclusie trekken? Welke stelling kun je daartoe gebruiken?

4 **Plan maken.**
Leg een verband tussen de consequenties van de gegeven situatie en van de gevraagde situatie. Maak een plan voor het achtereenvolgens uitvoeren van verschillende bewijsstappen. Ziet dat er goed uit? Kom je zo waar je wilt komen?

5 **Terug kijken.**
Zo, dit is een oplossing. Hoe ben je daaraan gekomen? Of waar ben je op vast gelopen? Hoe komt dat? Kan het beter? Waar heb je het meest aan gehad? Wat heeft je verder geholpen? Even in je logboek je eigen aanpak vastleggen van het exploreren en bewijzen.

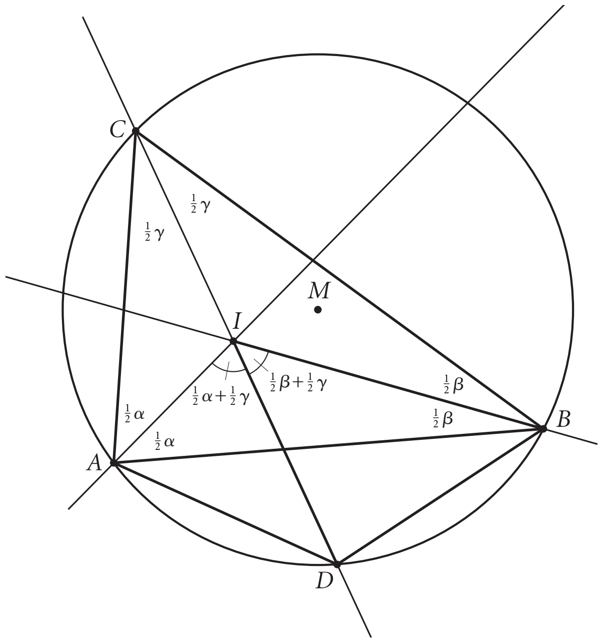
Het zoeken van een bewijs

De kunst is nu om in het lesmateriaal en de interactie met leerlingen deze elementen van een goede aanpak expliciet naar voren te halen. Dat kan nu en dan door als leraar bij het bord hardop denkend in wisselwerking met de klas een aanpak te zoeken en verschillende manieren van aanpak te vergelijken. Dat kan door expliciet van leerlingen te vragen om ook hun zoeken naar een aanpak op te schrijven. Een gunstig moment voor het bespreken van een goede aanpak is natuurlijk het optreden van een blokkade. De oplosser zit vast, wat nu? Het helpt als leerlingen dan hebben geleerd om volgens een heuristisch werkschema zich de nodige vragen te stellen. Laat ik dat eens toepassen op het zoeken naar het bewijs van het vermoeden uit figuur 3. Daarbij volg ik het heuristische werkschema uit het meetkundeboek van Moderne Wiskunde.

Analyseren

Vooruitdenken
Tja, ik zie niet onmiddellijk hoe ik dat bewijs moet aanpakken. Eerst de gegevens maar eens verwerken.
De bissectrices delen de hoeken doormidden. De halve hoeken zijn $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, en $\frac{1}{2}\gamma$.
Dan is $\angle DIB = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$ (buitenhoek van driehoek *CIB*).
Analoog is $\angle DIA = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$.

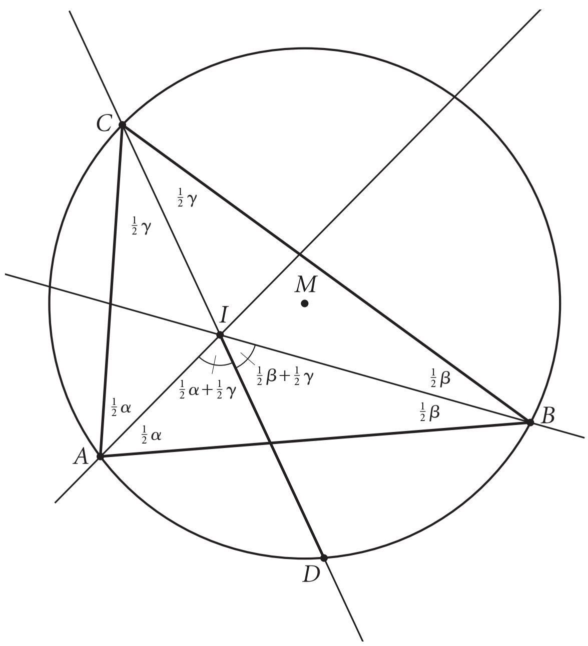
Even in de tekening bijschrijven.



Figuur 4 Vooruitdenken

Terugdenken
Hoe nu verder? Waar moet ik naar toe? We moeten aantonen dat $|DA| = |DI| = |DB|$.
$|DA|$ is natuurlijk $|DB|$ want boog AD = boog DB omdat de hoeken bij C aan elkaar gelijk zijn (gelijke hoeken, gelijke bogen, gelijke koorden).

Plan maken
We hebben nog te bewijzen dat $|DI| = |DB|$. Dan moet driehoek DIB gelijkbenig zijn. Dat is het geval als de hoeken *DIB* en *DBI* gelijk zijn. We hebben al dat $\angle DIB = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$. Die halve hoek β zit ook bij *ABI* (gegeven). En hoek ABD is een omtrekshoek op boog AD. Aha, daar staat $\angle ACD$ ook op, dus $\angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2}\gamma$.
Nu nog even in de goede volgorde opschrijven.



Figuur 5 Plan maken

Het bewijs opschrijven

Zoals uit de eerste experimentele examens al is gebleken, gaat het correct opschrijven van een bewijs niet vanzelf goed. Leerlingen moeten expliciet aan de hand van voorbeelden leren hoe zij een bewijs moeten opschrijven, zodat het aan redelijke normen van logische argumentatie en begrijpelijke communicatie voldoet. Elke redeneerstap moet daarbij worden verantwoord, bijvoorbeeld door verwijzing naar een stelling. Als de leerlingen eraan gewend zijn om de voorgaande analyse inderdaad ook op te schrijven, dan kan het bewijs ook kort zijn. Bijvoorbeeld als volgt.

Bewijs
$\angle ACD = \angle BCD$ (*gegeven*) $\Rightarrow$
boog $AD =$ boog BD (*gelijke bogen en omtrekshoeken*) $\Rightarrow$
$|AD| = |BD|$ (*gelijke bogen en koorden*) (1)

Bekijk driehoek DIB.
$\angle DIB = \angle ICB + \angle IBC$ (*buitenhoek van een driehoek*)
$\Rightarrow \angle DIB = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$ (*gegeven*) (2)
$\angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2}\gamma$ (*gelijke bogen en omtrekshoeken*)
$\Rightarrow \angle IBD = \angle IBA + \angle ABD = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$ (3)
Uit (1) en (2) volgt dat hoek $DIB =$ hoek $IBD \Rightarrow$
$|DI| = |DB|$ (*gelijkbenige driehoek*)
Combinatie van de resultaten (1) en (3) geeft $|DA| = |DI| = |DB|$.
Het punt I ligt op de cirkelboog met D tot middelpunt en $|AD| = |BD|$ als straal.

Terug kijken

Daar leer je het meest van voor de volgende keer. Hoe kwam ik op het goede idee? Kon het ook anders? Misschien wel mooier of sneller?
Meestal doe je zo'n bewijs met hoeken die constant blijven. Ja dat is natuurlijk hier ook zo. Ik had al dat $\angle AIB = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma$. Een constante hoek, want de hoek γ is constant (steeds op dezelfde boog) en de helft van $\alpha + \beta$ is dan ook constant. Verder staat $\angle AIB$ steeds op dezelfde boog dus is de meetkundige plaats voor I een cirkelboog. Maar daar volgt nog niet direct uit dat het punt D het middelpunt is, of toch wel?
Zo we laten het hier maar bij. Die andere cirkelboog, als C onder AB ligt, zal wel net zo gaan.

Tot slot

Voor het eerst sinds het verdwijnen van het vak wiskunde 2 op het vwo mogen wij, wiskundeleraren, weer wiskundeonderwijs verzorgen voor echte bètaleerlingen. En niet aan een heel klein keuzegroepje, zoals bij wiskunde 2, maar aan alle leerlingen die de keuze voor een technische of bètastudie open willen houden. Voor de toelating tot bijna alle natuurwetenschappelijke en technische universitaire studies is opname van het vak wiskunde B1,2 in het vakkenpakket immers verplicht, bijvoorbeeld in combinatie met het profiel Natuur en Gezondheid. Kennelijk hechten de wetenschappelijke disciplines veel waarde aan de manier van denken die in wiskunde B2 wordt ontwikkeld. Door die toelatingseisen heeft het vak wiskunde B2 een sleutelrol gekregen in de voorbereiding op een studie in de bètawetenschappen.
Kijken we naar het examenprogramma dan heeft de Voortgezette meetkunde de overijlde uitdunning van de programma's goed doorstaan. Binnen de beschikbare tijd moet het mogelijk zijn om met deze groep leerlingen een aantal van de geformuleerde hogere doelen te bereiken. Dat zal met vallen en opstaan gaan, omdat weinig wiskundeleraren nog ervaring hebben met de speciale didactiek van dit vak. Van het tweede domein, de Voortgezette analyse, is helaas weinig over gebleven. Helaas, omdat juist de verbinding met de gewone analyse is geschrapt. Wat overblijft is de studie van rijen als een afzonderlijk onderwerp, met een enkel uitstapje naar het oneindige. Wellicht zal in de komende jaren juist bij wiskunde B2 blijken dat er wel ruimte is voor het oorspronkelijke programma met heel interessante wiskundige en toegepaste problemen.
Zal er in ons onderwijs van het vak wiskunde B2 iets terecht komen van dat ontwikkelen van goede denkmethoden aan de hand van de voortgezette meetkunde en analyse? De voortekenen zijn gunstig. Uit een handvol nascholingsbijeenkomsten over de voortgezette meetkunde die wij in Groningen tot nu toe hebben gegeven zijn twee conclusies te trekken. Het is allereerst echt een vak waarbij je ook als leraar bij de opgaven je hersens weer moet gebruiken, want voor je het weet zit je op een verkeerd spoor. Niet eenvoudig dus om leerlingen te helpen bij het ontwikkelen van een goede probleemaanpak en een correcte bewijsvoering. Wel uitdagend om te doen. Mijn tweede conclusie is dat ik de laatste 25 jaar nooit zoveel echt plezier in een 'nieuw' wiskundig onderwerp heb meegemaakt. Ik noem de verbetenheid om er zelf uit te willen komen, de voldoening als je een oplossing heb gevonden, de verrassing bij het horen van een andere oplossing, het zoeken naar de meest elegante oplossing. Wat schreef Polya ook al weer? Als we daar iets van in onze lessen kunnen realiseren, dan wordt het lesgeven in wiskunde B2 vwo een voorrecht. En kiezen leerlingen dat vak massaal…

Literatuur

De genoemde afstudeerscriptie Vlakke meetkunde van Jacolien van Dijk en Iris Gullikers, (Rijksuniversiteit Groningen, wiskundedidactiek, 1997) is tegen reprokosten (ƒ 25,–) bij ons verkrijgbaar. Daarin vindt u ook een uitgebreide literatuurverwijzing.

A. van Streun,
A.van.Streun@math.rug.nl
IWI, Postbus 800, 9700 AV Groningen
tel. secretariaat (050) 36 33 950.

Boekbesprekingen

Op de website van de vereniging staan allerlei boekbesprekingen, onder andere ook van het boek van Heilbron, dat in het artikel ‘Euclides is terug’ wordt genoemd.
www.euronet.nl/~nvvw/tn_euclides.htm

bespreking

Laura T. Rigatelli
Evariste Galois 1811 – 1832
Translated in English by John Denton
Birkhäuser Verlag, 1996
160 p., DM 38,-

Samenzwering, revolutie, vurige liefde voor het vaderland, onbeantwoorde liefde, geniale wiskundige theorieën en ontdekkingen, miskenning door de gevestigde wiskundige elite, een gewelddadige dood nog voor zijn 21-ste verjaardag: het zijn ideale ingrediënten voor een roman, film of theaterproductie over het leven van de beroemde, jonggestorven wiskundige Evariste Galois.
Lastiger is het om een goed gedocumenteerde biografie over het leven van Galois te schrijven, die teruggaat op originele bronnen uit het Frankrijk van het begin van de 19de eeuw. Dit laatste heeft de Italiaanse hoogleraar in de geschiedenis van de wiskunde Laura Rigatelli gedaan. Het boek is in een Engelse vertaling verschenen als deel 11 in de serie Vita Mathematica van de Zwitserse uitgever Birkhäuser. Voor lezers die geïnteresseerd zijn in de voorgaande delen in deze serie biografieën van wiskundigen: bijna alle delen zijn in het Duits, er is nog één ander deel in het Engels (over Norbert Wiener) en één in het Frans (over André Weil).
Het boek is goed verzorgd, niet heel duur (DM 38) en het geeft in 160 bladzijden een minutieus getekend beeld van het leven van Galois in het rumoerige Parijs van de jaren rond 1830. Juist in dat jaar vond de bloedige revolutie plaats, waarbij de laatste Bourbon koning verjaagd werd en de 'burgerkoning' Louis Philippe aan de macht kwam. Deze gebeurtenissen hadden een zeer grote impact op het leven van de jonge Galois en zijn familie.
Galois' vader was burgemeester van een klein voorstadje van Parijs, raakte door politiek gekonkel zijn baan kwijt en pleegde zelfmoord. Galois zelf was zeer actief in de revolutionaire republikeinse beweging, en volgens Rigatelli was zijn (zelfgekozen) dood een onderdeel in een complot om een opstand van het volk tegen de machthebbers te forceren. Dat hij überhaupt de tijd en vooral de rust kon opbrengen om in die paar jaar een wiskundig oeuvre bij elkaar te schrijven, mag een wonder heten. De kritische editie van zijn verzamelde publicaties en manuscripten uit 1962 beslaat 541 pagina's! Het laatste hoofdstuk van het boek van mevr. Rigatelli is trouwens een overzicht van het wiskundige werk van Galois, met uitgebreide citaten uit het werk zelf. Helaas wreekt zich hier, dat de Engelse vertaler van het boek geen wiskundige is: nogal onbeholpen vertalingen van wiskundige termen duiken op. Zo wordt een zuiver periodieke kettingbreuk een 'immediately periodic continuous fraction' in plaats van een 'purely perodic continued fraction'.
Het boek eindigt met een zeer uitgebreide bibliografie, waarin behalve biografische studies over Galois' leven en studies over het werk van Galois, ook de romans, films en theaterstukken over Galois opgenomen zijn.
Door bovenbouwleerlingen zou dit boek gebruikt kunnen worden als belangrijkste bron bij een werkstuk over Galois' leven en werk. Voor wiskundeleraren en andere wiskundigen is het heel interessant om te lezen onder welke penibele omstandigheden de eerste aanzet tot de moderne abstracte algebra gegeven werd en hoe deze door de toenmalige wiskundige wereld ontvangen werd.

Rob Potharst

40 jaar geleden

NASCHRIFT

In 1958 heb ik bij de oplossing van het tweede vraagstuk over integraalrekening van het examen M.O. KV de volgende opmerking gemaakt:
"Wat de rest van de opgave betreft, is door de samensteller(s) van het vraagstuk niet de nauwgezetheid in acht genomen, die voor examenopgaven een eerste vereiste is. Er wordt nu van de candidaat geëist, te bewijzen: $\lim_{t\to 0} f(t) = \frac{1}{2}\pi$, een betrekking, *waarvan men op het eerste gezicht kan zien, dat zij onmogelijk juist kan zijn*".
In een noot heb ik daaraan nog toegevoegd: "Het voor KV opgegeven werk maakt trouwens over het geheel de indruk, dat aan de redactie van de opgaven niet de nodige zorg is besteed". Men kan deze opmerkingen vinden op blz. 129 van jaargang 46 van dit tijdschrift.
Ik zou het niet nodig vinden, het bovenstaande onder de aandacht van de lezers van dit tijdschrift te brengen, als de KV-opgaven van dit jaar (1959) geen aanleiding gaven tot kritiek. Ditmaal is het echter de eerste opgave voor integraalrekening, die een ernstige fout bevat. Het bewijs van de bewering onder ***a*** kan de candidaat niet leveren, *omdat die bewering alleen juist is voor* $a > 1$. Candidaten, die getracht hebben het bewijs ook te leveren voor $0 < a < 1$, hebben hiermee kostbare tijd verspild. Ik meen wel te mogen beweren, dat geen enkele van deze candidaten de moed heeft gehad de oorzaak van het mislukken van het bewijs voor $0 < a < 1$ niet aan een fout van hemzelf, doch aan een fout in de opgave te wijten. Daarvoor hebben de candidaten nu eenmaal teveel vertrouwen in de onfeilbaarheid van de examencommissie.
De spanning, waarin de candidaat komt te verkeren, wanneer hem het bewijs voor het geval $0 < a < 1$ na herhaalde pogingen mislukt en de overtuiging, die hij daardoor (ten onrechte) krijgt, reeds bij het eerste gedeelte van de eerste opgave voor een zo belangrijk onderdeel als de integraalrekening te kort te schieten, kunnen niet anders dan een ongunstige invloed hebben op de rest van zijn examenprestatie in dit vak. In welke mate zijn prestatie daardoor daalt, is achteraf (d.w.z. bij de beoordeling van het door hem ingeleverde werk) niet vast te stellen. Het is dan ook een illusie te menen, dat er wel een of ander beoordelingsprocedé kan worden gevonden, dat rekening houdend met de fout in de opgave, tot een enigszins betrouwbaar waarderingscijfer voor het gehele werk voert. Daaruit volgt, dat het voor integraalrekening ingeleverde werk dit jaar niet voor gefundeerde beoordeling vatbaar is en dat het schriftelijk examen in dit vak als een totale mislukking moet worden beschouwd. Voor een examencommissie, die de vrijheid bezit aan de candidaten de hoogste onderwijsbevoegdheid voor de wiskunde toe te kennen, lijkt me dit een ernstige blamage. Wanneer het een commissie betrof, die uit lieden van twijfelachtige competentie bestond, zou men aan een en ander wellicht met een berustend schouderophalen voorbij kunnen gaan. Zo is het evenwel niet: de competentie van ieder lid is boven elke twijfel verheven. Ik kan dan ook met de beste wil het voorkomen van de gesignaleerde fout nergens anders aan wijten dan aan verregaande nonchalance of aan een laakbaar gebrek aan samenwerking bij het samenstellen en redigeren van de opgaven, waarbij het een het ander niet behoeft uit te sluiten. Het is immers ook opvallend dat in de opgaven over beschrijvende meetkunde voor KI gesproken wordt van punten wier horizontale projecties y cm vóór de as van projectie liggen, terwijl in een van de KV-opgaven zulke horizontale projecties y cm onder de as heten te liggen. In de bedoelde KV-opgave moet de candidaat zelfs de tweede projectie van een lijn tekenen, zodanig, dat die tweede projectie de eerste doorgang van een vlak snijdt. Men kan zich hier nu wel van af maken door de bewering, dat ieder wel begrijpt wat de bedoeling is en ik geloof ook grif, dat alle candidaten dit wel zo hebben getekend als de steller(s) van de opgave het wenste(n), maar ik vind het toch maar een bedenkelijke manier om de werkelijke situatie in woorden in brengen. Van een commissie van de standing als deze mag toch wel iets beters worden verwacht! Het samenstellen en redigeren van examenopgaven (die bestemd zijn om aan de openbaarheid te worden prijsgegeven) is een delicate taak, die men niet ernstig genoeg kan opvatten. In het vervullen van deze taak is zowel de commissie 1958 als de commissie 1959 tekortgeschoten op een wijze, die men niet anders dan als schandelijk mag kwalificeren.

Veldkamp

G.R. Veldkamp in Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 47 (1959-1960);
G.R. Veldkamp –later hoogleraar te Eindhoven- was jarenlang redacteur van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, het blad voor de aktenstudies. Alle opgaven van alle aktenexamens (LO, MO A & KI, MO B & KV) werden in het tijdschrift uitgewerkt.

Gemiddelden

Koos Wagensveld

Inleiding

Het begrip gemiddelde is ons zo vertrouwd, dat we te weinig bewust nadenken over wat precies bedoeld wordt als we het woord 'gemiddelde' tegenkomen. Onder het gemiddelde van een aantal gelijksoortige grootheden verstaat men één gelijksoortige grootheid, die in een bepaalde berekening in de plaats gesteld van de oorspronkelijke grootheden, tot dezelfde uitkomst leidt.[1]) Er zijn echter meer omschrijvingen van het begrip gemiddelde. Eigenlijk is 'gemiddelde' een term die zonder nadere precisering geen zin heeft. In dit artikel zullen een aantal verschillende manieren van het berekenen van een gemiddelde op een rij worden gezet. Deze definities kunnen mogelijk een basis zijn om leerlingen onderzoekjes te laten doen naar situaties, waarin verschillende definities toepasbaar zijn.

Rekenkundig gemiddelde

Als de som van de elementen gelijk moet blijven, heet het gemiddelde het rekenkundig gemiddelde. Het rekenkundig gemiddelde wordt gevonden door de som van de elementen (waarnemingen) te delen door het aantal elementen (waarnemingen).
Voorbeeld 1
Petra stort op een spaarrekening in vier opvolgende maanden respectievelijk *ƒ* 300,-, *ƒ* 600,-, *ƒ* 700,- en *ƒ* 900,-. Bereken de gemiddelde storting.
De verzameling van de stortingen is {*ƒ* 300, *ƒ* 600, *ƒ* 700, *ƒ* 900}. Als 'gelijkblijvend resultaat' kiezen we de som van de stortingen. Deze som is *ƒ* 300 + *ƒ* 600 + *ƒ* 700 + *ƒ* 900 = *ƒ* 2500. Vervangen we de vier elementen van de verzameling elk door *ƒ* 625,- dan is de som ook *ƒ* 2500,-. *ƒ* 625 is geen element van de gegeven verzameling. Het rekenkundig gemiddelde van de eerste drie bedragen is zelfs geen bestaand bedrag.
ƒ 1600 / 3 = *ƒ* 533,33333333333333… of *ƒ* 533 1/3.

Gewogen rekenkundig gemiddelde

Bij het gewogen rekenkundig gemiddelde wordt elke waarneming vermenigvuldigd met zijn bijbehorend gewicht (belangrijkheidsfactor). Het gemiddelde wordt gevonden door de som van deze produkten te delen door de som van de gewichten.

Voorbeeld 2
Kiest men in het bovenstaande voorbeeld een ander 'gelijkblijvend resultaat' dan resulteert een ander gemiddelde. Kiest men als 'gelijkblijvend resultaat' het rentebedrag één jaar na de eerste storting, dan bepalen we het gemiddelde als volgt.
Neem een interestvergoeding van 12% enkelvoudige interest per jaar.

De rente op het bedrag van *ƒ* 300,-	is 0,12 * *ƒ* 300,- =	*ƒ* 36,-
De rente op het bedrag van *ƒ* 600,-	is 0,11 * *ƒ* 600,- =	*ƒ* 66,-
De rente op het bedrag van *ƒ* 700,-	is 0,10 * *ƒ* 700,- =	*ƒ* 70,-
De rente op het bedrag van *ƒ* 900,-	is 0,09 * *ƒ* 900,- =	*ƒ* 81,-
		ƒ 253,-

Welk bedrag had Petra elke maand moeten storten om aan het eind van het jaar ook *ƒ* 253,- aan rente te kunnen ontvangen?
Noem dit bedrag x. De totale rente is dan aan het eind van het jaar $(0{,}12 + 0{,}11 + 0{,}10 + 0{,}09) * x = 253$, dus $x = 602{,}3809524$.
Ook hier vinden we een niet bestaand bedrag. Voor de rente is de looptijd belangrijk. Het eerste bedrag staat 12 maanden uit, het tweede maar 11 maanden, etc. De gewichten (belangrijkheidsfactoren) zijn achtereenvolgens 12, 11, 10 en 9.
Voorbeeld 3
Zou de rente op een ander tijdstip berekend zijn, dan zouden de gewichten veranderen en daardoor ook het gewogen rekenkundig gemiddelde. Kiest men als 'gelijkblijvend resultaat' het totale tegoed vier maanden na de eerste storting dan vinden we het volgende bedrag bij 12% enkelvoudige interest per jaar.
{1,04*300 + 1,03*600 + 1,02*700 + 1,01*900}/
{1,04 + 1,03 + 1,02 + 1,01} = 622,6829268.

Meetkundig gemiddelde

Als het produkt even groot blijft, spreken we van het meetkundig gemiddelde. Het meetkundig gemiddelde is de $n$de-machtswortel uit het produkt van n getallen.
Voorbeeld 4
Een kist is 120 cm bij 180 cm bij 270 cm. Om materiaal te besparen wil men bij gelijke inhoud een kist maken die kubusvormig is. Welke afmetingen moet deze kist hebben? Noem de ribbe van de kubus x, dan geldt
$x^3 = 120 \text{ cm} * 180 \text{ cm} * 270 \text{ cm}$, en $x = 180$ cm.

Voorbeeld 5
De prijs van een bepaald artikel steeg in 1997 met 28% en in 1998 met 12,5%. Bereken de gemiddelde jaarlijkse prijsstijging.
Prijs * 1,28 * 1,125 = Prijs * $(1 + p/100)^2$ en dus $p = 20$.
De gemiddelde prijsstijging is 20% per jaar. Hier werd eerst het meetkundig gemiddelde van de factoren berekend. Dat is niet hetzelfde als het meetkundig gemiddelde van de procenten.

Harmonisch gemiddelde

Wanneer de som van de reciproken (omgekeerden) constant blijft, spreekt men van een harmonisch gemiddelde. Het harmonisch gemiddelde is het omgekeerde van het rekenkundig gemiddelde van de omgekeerden van een aantal getallen.
Voorbeeld 6
De dienstregeling van de NS is op een bepaald traject gebaseerd op een snelheid van 120 km per uur. De tijdsduur op dit traject is 20 minuten. De afstand is dus 40 km. Door stagnatie wordt de eerste helft van het traject maar een snelheid van 100 km per uur bereikt. De machinist kan daarna de snelheid weer opvoeren. Hij brengt deze op 140 km/uur, zodat het rekenkundig gemiddelde van de snelheden op 120 km/uur komt. Toch komt hij te laat aan. Hoe komt dat?
Over de eerste 20 km doet de trein 12 minuten. Er moet nog 20 km worden afgelegd in de resterende 8 minuten. De snelheid moet dan geen 140 km/uur maar (20/8 * 60) km/uur = 150 km/uur zijn. De machinist gebruikte een verkeerd gemiddelde. Hier moet de som van de omgekeerden gelijk blijven.
$1/100 + 1/x = 1/120 + 1/120$, dus $x = 150$
Had de machinist niet over gelijke afstanden maar over gelijke tijden met de desbetreffende snelheden gereden, dan was het rekenkundig gemiddelde wel het juiste gemiddelde geweest.
Of een gemiddelde relevant is, hangt van de omstandigheden af.

Gemiddelde vervaldag of uniformdatum

De gemiddelde vervaldag is die dag die, in de plaats gesteld van alle elementen van een verzameling vervaldagen, een zelfde resultaat oplevert. De gemiddelde vervaldag wordt ook wel uniformdatum genoemd. Het is de datum die aan het eind van de gemiddelde looptijd ligt. Als 'onveranderd resultaat' kiest men in het algemeen de rentevergoeding op een willekeurige datum.
De uniformdatum wordt echter ook wel gedefinieerd als de datum waarop vereffening kan plaatsvinden zonder rentevergoeding. Deze definitie komt in sommige gevallen niet op hetzelfde neer.
Voorbeeld 7
Mevrouw A heeft van de heer B te vorderen *ƒ* 5000,- op 2 april 1999 en *ƒ* 7000,- op 26 april 1999. Rentevoet 12% enkelvoudige interest per jaar (360 dagen).
a Bereken de gemiddelde vervaldag bij een afrekening op 29 april.
b Bereken de uniformdatum.
Oplossing:
a De interest is (5000*27*12 + 7000*3*12)/36000.
Noem de gemiddelde vervaldag x april. De interest is $(12000*(29 - x)*12)/36000$. Gelijkstelling geeft $x = 16$.
De gemiddelde vervaldag is 16 april. Alle rentebedragen zijn berekend met enkelvoudige interest[2]).
b De uniformdatum ligt tussen 2 en 26 april. Neem deze datum x dagen na 2 april.
ƒ 5000,- wordt x dagen later afgerekend, er komt interest bij.
ƒ 7000,- wordt $(24 - x)$ dagen eerder afgerekend. Er gaat disconto af.
Men veronachtzaamt hier in het algemeen het verschil tussen interest en disconto.
$5000*x*12/36000 = 7000*(24 - x)*12/36000$, dus $x = 14$.
De uniformdatum ligt 14 dagen na 2 april is 16 april.

Ten slotte

Het vragen naar een gemiddelde zonder verdere aanduiding is zinloos. Dikwijls valt uit de probleemstelling op te maken welk gemiddelde relevant is. Voor leerlingen ligt er een uitdaging om te onderzoeken in welke situaties de verschillende soorten gemiddelden toepasbaar zijn.[3])

Noten

1 Vergelijk A.L.B. de la Fosse & A.J. Kattevilder, 'Beleidscalculaties deel 1 Financiële Rekenkunde', Numan & Van der Put, Rotterdam, 1991, blz. 11.

2 Alleen als de afrekening na 26 april valt zijn de rentebedragen alle met enkelvoudige interest berekend. Valt de afrekening tussen 2 en 26 april dan gaat het ene bedrag met interest en het andere met disconto. Valt de afrekening voor 2 april dan wordt de rente met disconto berekend. Zie voor de begrippen rente, interest en disconto D.J. Karman & J. Wagensveld, 'Continue interest', Tijdschrift voor Bedrijfsadministratie, nr. 1160, 1993, blz. 459-467.

3 Bijkomend voordeel bij dit soort onderzoekjes is, dat praktijkvoorbeelden uit de krant gemakkelijk te vinden zijn: zie bijvoorbeeld W. Sweers, 'Rekenen en wiskunde ter overbrugging', Zwijsen, Tilburg, 1982, blz. 103-108.

Opgave 697

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A
2563 EB Den Haag

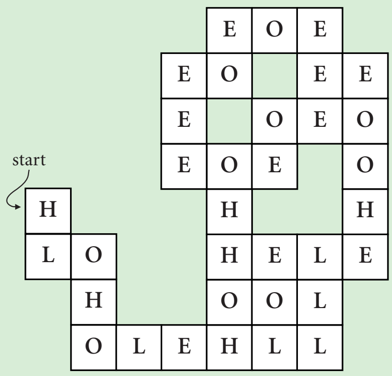
Doolhoven zijn voor kinderen, toch?' dacht ik altijd als ik weer eens zo'n plaatje van een doolhof zag. Dat het ook anders kan ondervond uw puzzelredacteur toen hij het boek 'The Mathemagician and Pied Puzzler' bestudeerde. De samenstellers zijn Elwyn Berlekamp en Tom Rodgers (© 1999 by A.K. Peters, Ltd, Natick, Massachusetts, ISBN 1-56881-075-X). De ondertitel luidt: 'A Collection in Tribute to Martin Gardner'.

Tientallen jaren verzorgde Martin Gardner de rubriek 'Mathematical Games' in *Scientific American*. Vele jaren na het stoppen van deze rubriek organiseerde Tom Rodgers in januari 1993 een puzzelweekend ter ere van Martin: deze eerste 'Gathering For Gardner'- werd genoemd G4G1. In januari 1995 G4G2, in januari 1998 G4G3. Alleen voor genodigden zal G4G4 van 18 t/m 20 februari 2000 plaats vinden in Atlanta. Naar aanleiding van G4G1 is bovengenoemd boek verschenen met 38 artikelen, verdeeld over 3 groepen:
I Personal Magic, II Puzzlers, III Mathemagics

Het artikel over de doolhof van deze maand eindigt met 'I won't give the solution, but it takes 66 moves'. Na avonden puzzelen vond ik inderdaad een oplossing en durf ik hem als opgave te geven.
Op de START H plaatst u een dobbelsteen met de 2 boven en de 6 naar voren. Nu mag u de dobbelsteen naar een naastliggend vakje kantelen onder de volgende voorwaarden:

L	=	Laag	=	1, 2 of 3 boven
H	=	hoog	=	4, 5 of 6 boven
O	=	Oneven	=	1, 3 of 5 boven
E	=	Even	=	2, 4 of 6 boven

De bedoeling is dat de dobbelsteen weer op de oorspronkelijke START H terugkeert!
Mag ik het begin verklappen? (Het getal is het ogenaantal dat boven ligt, de letter is de richting.)
2Z, 1O, 4Z, 5Z, 3O, 6O, 4O, 1N, 5O, 3Z, 1O, 2N, 3W, 1W, 4N, 5N, 3N, …
Hoe gaan we verder kantelend naar de START H?



Als u de oplossing vindt en binnen een maand instuurt, ontvangt u 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Recreatie

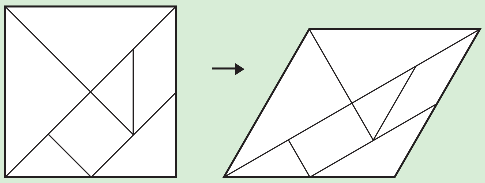
Oplossing 694

Recreatie

Het normale tangrampuzzeltje was getekend op driehoekjespapier. Het basisdriehoekje heeft dan hoeken van 30, 60 en 90 graden en heeft als zijden 1, $\sqrt{3}$ en 2. Als we nu het bewijs volgen van Fu Traing Wang en Chuan-Chih Hsiung in hun artikel 'A theorem on the tangram' (*American Mathematical Monthly*, Vol. 49, November 1942), dan kunnen we de volgende opmerkingen maken:

- De convexe veelhoek heeft een oppervlakte van 16 basisdriehoekjes, dus de oppervlakte is gelijk aan $8\sqrt{3}$.
- De veelhoek is convex, dus de hoeken zijn 30, 60, 90, 120 of 150 graden.
- De rationele zijde van een puzzelstukje ligt niet tegen de irrationele zijde van een ander puzzelstukje. Voor het gemak kunnen we dan de zijkanten van de zeven stukjes kleuren: zijden met lengte 1, 2 of 4 rood en de zijden met lengte $\sqrt{3}$ en $2\sqrt{3}$ blauw.
- Aantal zijden van de convexe veelhoek zal hoogstens 12 zijn, immers $(n-2)\pi \leq \frac{5}{6}\pi n$.

Om alle inzendingen te controleren kreeg ik gelukkig assistentie van Pieter Torbijn. Nog hartelijk dank hiervoor!
In eerste instantie wilden we ordenen op hoekgrootte. Maar vrij snel zagen we dit mislukken doordat er bijvoorbeeld twee verschillende rechthoeken te maken zijn. Daarna zijn we gaan ordenen op zijdelengte, waarbij we zijdelengte $\sqrt{3}$ vervingen door een accent. Dus zijdelengte $2\sqrt{3}$ noteren we als 2'. Nu heeft elke veelhoek een unieke codering, als we linksom of rechtsom gaand het <u>kleinste</u> getal noteren. Nu kunnen we alle oplossingen op numerieke volgorde plaatsen, waarbij een getal met accent later komt dan hetzelfde getal zonder accent.



Het blijkt dat we 46 convexe veelhoeken kunnen maken met het isometrisch tangram: 1 driehoek, 10 vierhoeken, 15 vijfhoeken, 15 zeshoeken, 4 zevenhoeken, 1 achthoek.

Voordat Pieter mij hielp bij het nakijken had hij zelf al 45 veelhoeken gevonden! Grote bewondering hebben we voor Wobien Doyer, Nieuw-Vennep en Thijs Notenboom, Utrecht die 44 veelhoeken vonden. Ook het bewijs van Leo van de Raadt, Heemstede (39 oplossingen) vonden we zeer de moeite waard om te bestuderen.
Dank voor alle inzendingen, soms vele A4'tjes.

Op bladzijde 144b vindt u alle 46 figuren. We zijn er van overtuigd dat er geen convexe figuren meer te vinden zijn, die met het isometrisch tangram te maken zijn.

Met 67 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 50,–:

Wobien Doyer
Vagerveld 23
2151 ZB Nieuw-Vennep

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het lopende schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
5	17-02-00	06-01-00
6	30-03-00	17-02-00
7	15-05-00	30-03-00
8	26-06-00	11-05-00

Wiskunde en ICT in 21e eeuw
do. 20 januari 2000
APS-conferentie, Houten
030-2856722

Eerste ronde Wiskunde Olympiade
vr. 21 januari 2000 !!!!
Secret.: 026-3521294

Wiskunde in het vmbo
woensdag 2 febr. 2000
APS-conferentie, Utrecht
030-2856722

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 4 en za. 5 februari 2000
Freudenthal Instituut
030-2611611
www.fi.uu.nl/nwd
Zie aankondiging 74-8

WWW-lympiade
ma. 7 feb. - vr. 11 feb. 2000
Freudenthal Instituut
030-2611611
www.fi.uu.nl/wwwlympiade
Zie aankondiging 74-8

Kangoeroe-wedstrijd
vr. 17 maart 2000
TUE: 040 - 2472738
Aankondiging volgt later

Regionale ICT-Onderwijsdagen
16/2/00 Amsterdam
23/2/00 Groningen
15/3/00 Eindhoven
29/3/00 Rotterdam
13/4/00 Hengelo
26/4/00 Utrecht
www.ict.onderwijs.nl

Examendata 2000
vbo/mavo C/D
vr. 26/05/00
havo A/A12
do. 25/05/00
havo B/B1/B12
di. 23/05/00
vwo A
wo. 17/05/00
vwo B/profi
do. 25/05/00

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31/6/00 - 6/8/00
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

Internetsites voor wiskundedocenten:

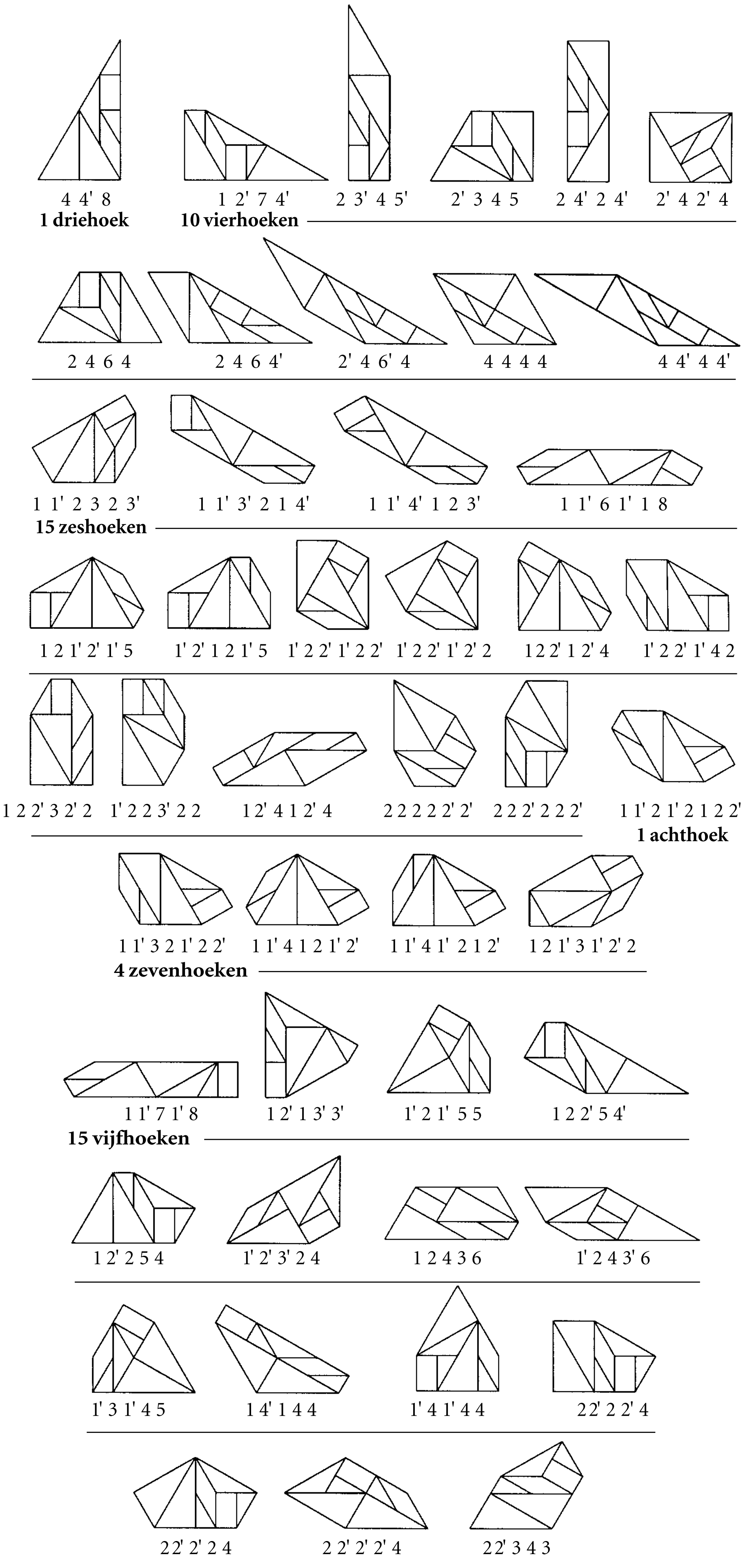
NVvW website
Bezoek regelmatig de website van de NVvW. Boordevol actuele informatie
www.euronet.nl/~nvvw

Historische wiskundeteksten
Op onderstaande website staan allerlei historische bronnen, onder andere de brochures die zo centraal staan in dit nummer van Euclides.
In het register staan Dijksterhuis en Ehrenfest vriendschappelijk onder elkaar.
www.math.sci.kun.nl/math/werkgroepen/gmfw/bronnen

Boekbesprekingen
Op de website van de vereniging staan allerlei boekbesprekingen onder andere ook van het boek van Heilbron, dat in het artikel Euclides is terug wordt genoemd.
www.euronet.nl/~nvvw/tn_euclides.htm

Regionale ICT-Onderwijsdagen
www.ict.onderwijs.nl
www.school-computer.nl

Suggesties voor interessante sites of interessante free-ware voor wiskundedocenten graag zenden aan
e-mail: cph@xs4all.nl


4 4' 8
1 driehoek
1 2' 7 4'
2 3' 4 5'
2' 3 4 5
2 4' 2 4'
2' 4 2' 4
10 vierhoeken
2 4 6 4
2 4 6 4'
2' 4 6' 4
4 4 4 4
4 4' 4 4'
1 1' 2 3 2 3'
1 1' 3' 2 1 4'
1 1' 4' 1 2 3'
1 1' 6 1' 1 8
15 zeshoeken
1 2 1' 2' 1' 5
1' 2' 1 2 1' 5
1' 2 2' 1' 2 2'
1' 2 2' 1' 2' 2
1 2 2' 1 2' 4
1' 2 2' 1' 4 2
1 2 2' 3 2' 2
1' 2 2 3' 2 2
1 2' 4 1 2' 4
2 2 2 2 2' 2'
2 2 2' 2 2 2'
1 1' 2 1' 2 1 2 2'
1 achthoek
1 1' 3 2 1' 2 2'
1 1' 4 1 2 1' 2'
1 1' 4 1' 2 1 2'
1 2 1' 3 1' 2' 2
4 zevenhoeken
1 1' 7 1' 8
1 2' 1 3' 3'
1' 2 1' 5 5
1 2 2' 5 4'
15 vijfhoeken
1 2' 2 5 4
1' 2' 3' 2 4
1 2 4 3 6
1' 2 4 3' 6
1' 3 1' 4 5
1 4' 1 4 4
1' 4 1' 4 4
2 2' 2 2' 4
2 2' 2' 2 4
2 2' 2' 2' 4
2 2' 3 4 3

Nieuw

de serie Keuzeonderwerpen wiskunde vwo

Elk boek bestaat uit drie delen. Het eerste deel (Opdrachten) is geschikt voor alle profielen. Het tweede deel (Onderzoek) en het derde deel (Presentatie) bevatten pittiger opgaven. De meeste vragen liggen binnen het bereik van alle profielen. Uit deze vragen maakt de leerling een keuze. Met elk boek zijn 40 studielasturen gemoeid.

Over zeeën van tijd
Hollandse navigatie in de 16e en 17e eeuw
Vincent van Leijen

Hoe vonden de zeevaarders uit de 16e en 17e eeuw hun weg op de onafzienbare oceanen? Dit boekje gaat over navigatie, het samenspel van vernuftige methoden en instrumenten. En over de wiskunde erachter.

ISBN 90 01 83302 0
f 22,00 € 9,98

Wiskunde met verve
Prof. F. van der Blij

De toepassing van wiskunde in de beeldende kunst. Nu eens geen perspectief of Escher, maar een nieuwe, verfrissende keuze. Het bondgenootschap tussen wiskunde en kunst heeft heel wat verrassingen in petto.

ISBN 90 01 83300 4
f 22,00 € 9,98

De boeken zijn alleen voor rekening leverbaar. U kunt ze bestellen met de bon. Stuur deze in een gefrankeerde enveloppe naar Wolters-Noordhoff, t.a.v. afd. Voorlichting Exact, Postbus 58, 9700 MB Groningen. E-mailen kan ook: voorlichting.vo.exact@wolters.nl.

Bestelcoupon

Ja, ik bestel

___ ex *Over zeeën van tijd* à *f* 22,00/€ 9,98 90 01 83302 0

___ ex *Wiskunde met verve* à *f* 22,00/€ 9,98 90 01 83300 4

Naam school ______________________

Ter attentie van ______________________

Adres ______________________

Postcode/Plaats ______________________

419/9287

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff

419/9287